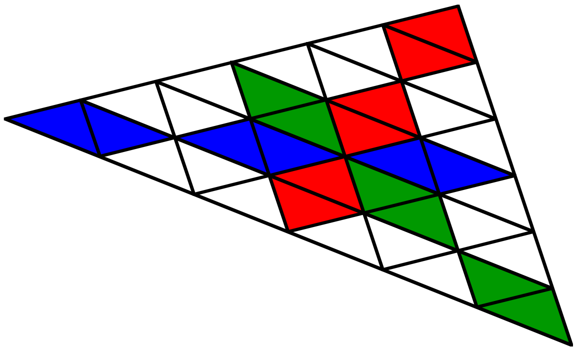
Hans Walser

Wenn drei sich treffen: Schnittpunkte

Vortrag im Rahmen 7. Forums für Begabungsförderung an der Uni München
18.03.2005



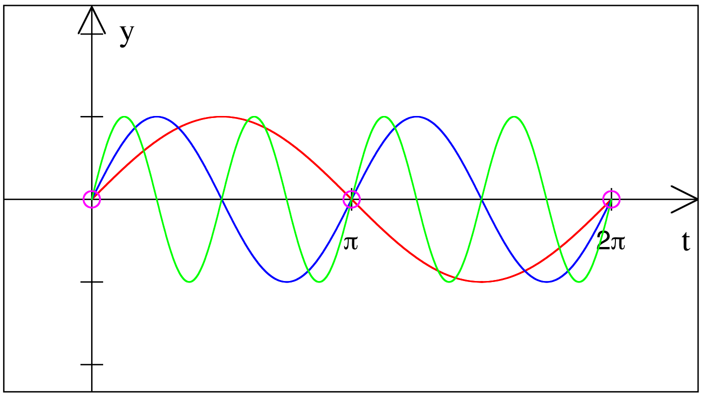
Inhalt

Kurzfassung

Drei oder mehr beliebige Geraden oder Kurven haben in der Regel keinen gemeinsamen Schnittpunkt.
Wenn aber ein solcher gemeinsamer Schnittpunkt vorliegt, stellen sich Fragen:
Warum ist das so?
Ist das Beispiel zufällig oder allgemein?
Wie finden wir solche und ähnliche Beispiele?
Es werden Beispiele und Anregungen von Schnittpunkten gegeben, die über die vier klassischen Schnittpunkte (Mittelsenkrechte, Schwerlinien, Höhen, Winkelhalbierende im Dreieck) hinausgehen. Dabei kommen auch Fragen der Heuristik, der Beweistechniken und der technischen Hilfsmittel zur Sprache.

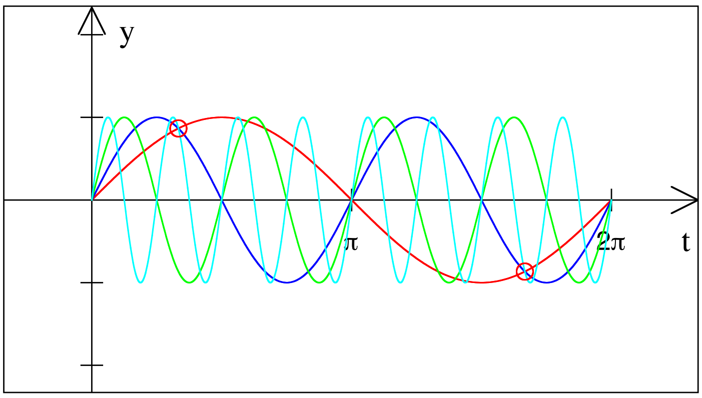
1 Töne und Obertöne

Wir beginnen mit einem Grundton $y = \sin(t)$ und dazu die erste und zweite Oktave, also $y = \sin(2t)$ und $y = \sin(4t)$.



Verdoppelung der Frequenzen

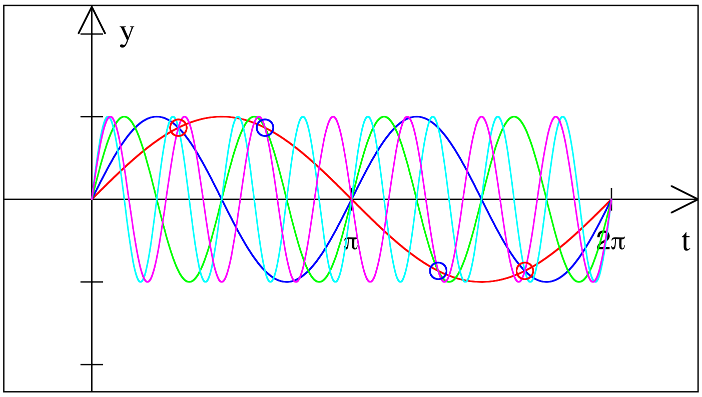
Die drei Kurven schneiden sich in den Knotenpunkten; das ist weiter nicht interessant. Wenn wir noch eine Oktave höher gehen, also $y = \sin(8t)$, geschieht folgendes.



Schnittpunkte von drei Kurven

Drei der vier Kurven schneiden sich in Punkten außerhalb der Zeitachse.

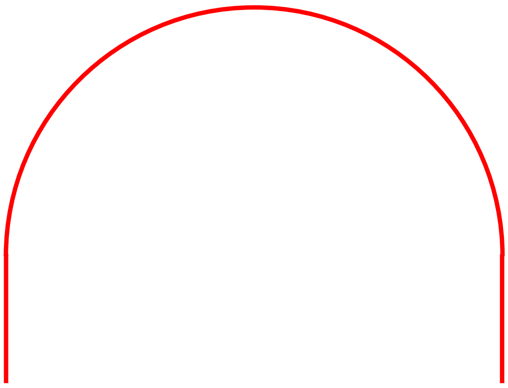
Jetzt gibt es allerdings einen Misston: auch die Kurve von $y = \sin(7t)$ geht durch diese Punkte. Ferner erkennen wir weitere nichttriviale Schnittpunkte.



Der Misston

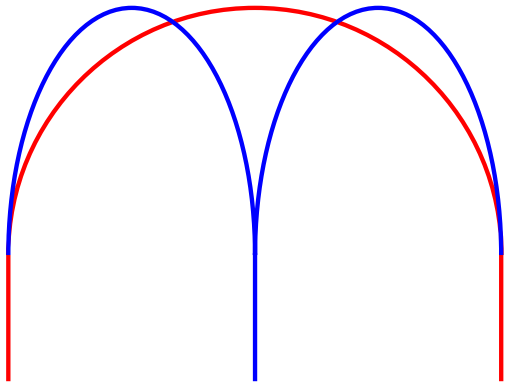
Frage: Welche Tripel $\left(\sin(it),\sin(jt),\sin(kt)\right)$ haben wie viele gemeinsame Schnittpunkte? Wo sind die Schnittpunkte? Warum?
Funktionen dieser Art werden bei Fourier-Entwicklungen verwendet.

2 Das Tor zur Hölle



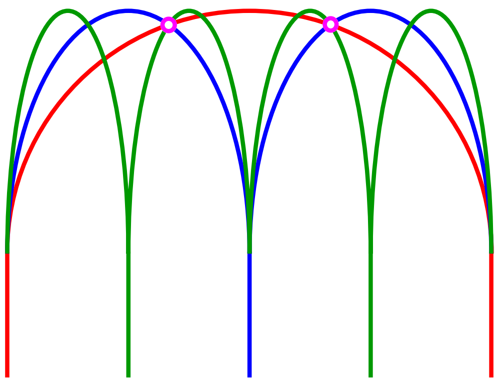
Das Tor zur Hölle ist weit

Wir fügen zwei halb so breite Torbögen dazu.



Nun wird’s enger

Wenn wir nochmals halb so breite Tore dazufügen, ergeben sich Schnittpunkte.

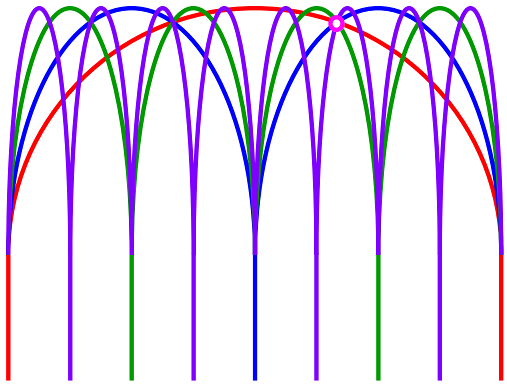


Schnittpunkte

In der didaktischen Literatur ist es üblich, Fragen, die sich der Autor am Schreibtisch ausgedacht hat, als Schülerfragen zu deklarieren. Ich pflege, wegen der political correctness, solche Fragen abwechslungsweise einer Petra und einem Peter in den Mund zu legen. Die folgende Frage ist echt.

Die Oma-Frage: Wie dick ist es am Schnittpunkt?

Im folgenden Bild ist der eingezeichnete Schnittpunkt bereits vier Lagen dick. Und es kommt noch dicker.



Vier Lagen dicker Schnittpunkt

Wir stellen weiter fest, dass der erste Torbogen mit der Breite 1 (rot) beim Durchgang durch den Schnittpunkt nach rechts unten läuft. Der zweite Torbogen mit der Breite $\frac{1}{2}$ verläuft hingegen nach rechts oben. Dann wechselt das immer ab. Vergleichen wir das mit:

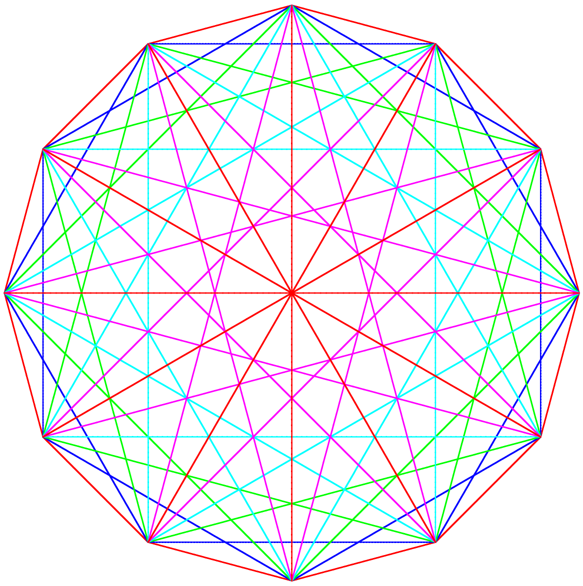
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

Nun ist aber der Schnittpunkt in horizontaler Richtung in der Position $\frac{2}{3}$, bezogen auf die ganze Torbreite. Zufall? Lässt sich damit die Schnittpunktseigenschaft beweisen?

3 Im Zwölferkreis

Wir gehen aus von 12 Punkten, welche regelmäßig auf einem Kreis verteilt sind wie die Ziffern einer Uhr, die Tierkreiszeichen oder die Eckpunkte eines regelmäßigen Zwölfeckes.

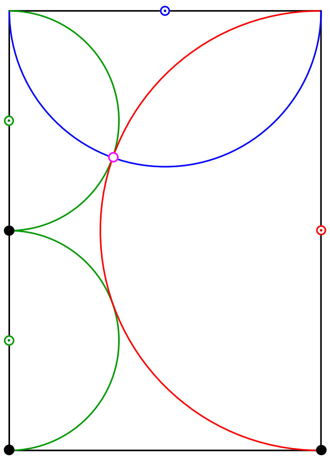
Unter den Diagonalen eines regelmäßigen Zwölfeckes gibt es viele Schnittpunkte von drei oder mehr Diagonalen, welche trivial sind, da eine oder mehrere Diagonalen Symmetrieachsen sind. Es gibt aber auch Schnittpunkte, welche nicht trivial sind und zu deren Nachweis einiges an trigonometrischer Berechnung erforderlich ist. Wie ist die Situation bei anderen regelmäßigen Vielecken?



Triviale und nicht triviale Schnittpunkte

4 DIN A4

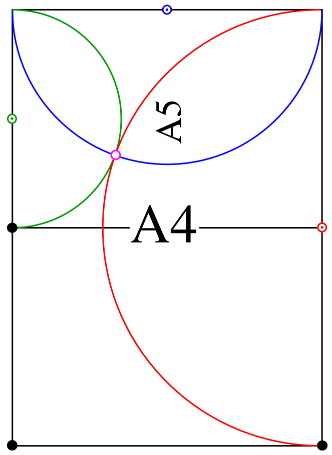
In einem Rechteck mit den Proportionen eines DIN A4 Formates können über den Seiten Halbkreise eingezeichnet werden, so dass ein Schnittpunkt entsteht.



DIN A4 Format

Der Schnittpunkt ist der Fixpunkt der Drehstreckung, welche das A4-Blatt auf das halb so große A5-Blatt in der oberen Hälfte abbildet. Der Drehwinkel ist dabei 90°, der Streckfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 71\%$. Eigentlich ist das eine Schrumpfung.

Der große rote Halbkreis wird dabei auf den mittleren blauen Halbkreis abgebildet, und dieser auf den oberen kleinen grünen Halbkreis.

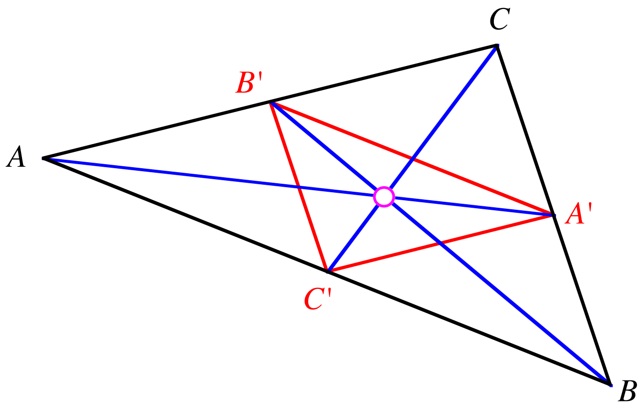


A4 und A5

Fragen: Gibt es andere Möglichkeiten, diesen Fixpunkt zu finden? Wie ist dieser Fixpunkt auf dem A4-Blatt positioniert?

5 Alle Wege führen zum Schwerpunkt

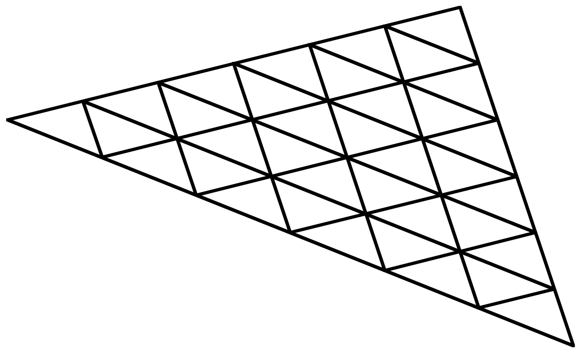
Die Drehstreckung ist auch ein möglicher Zugang zum von der Schule her bekannten Schwerpunkt. Der Drehwinkel ist dabei 180°, der Streckfaktor $\frac{1}{2} = 50\%$. Auch dies ist eigentlich eine Schrumpfung.



Schwerpunkt als Zentrum einer Drehstreckung

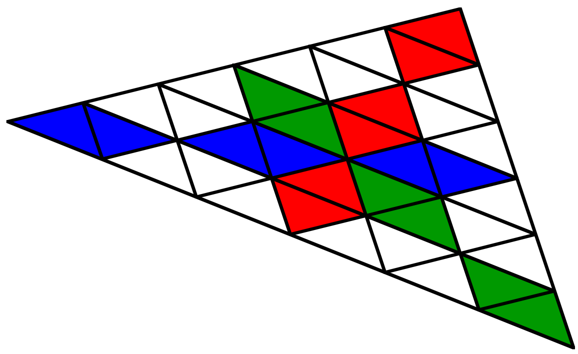
Eine anderer Weg führt über eine Parkettierung.

Wir zerlegen das Dreieck in $6 \times 6 = 36$ gleiche Dreiecke, welche zudem dieselbe Form haben wie das Ausgangsdreieck. Dadurch erhalten wir eine Parkettierung oder Rasterung des Dreieckes.



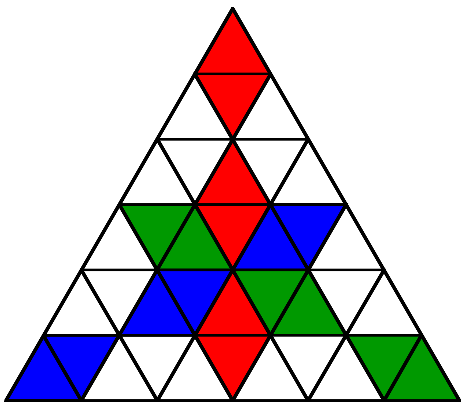
Parkettierung des Dreieckes

Nun färben wir gemäß Figur; dann ist alles klar.



Der Schwerpunkt wird sichtbar als Schnittpunkt von Rhombendiagonalen

Wenn es Ihnen auch so geht wie mir, haben Sie beim obigen Bild Mühe, das Dreieck als „allgemeines“, also unregelmäßiges Dreieck zu sehen. Vielmehr versuchen wir, das Dreieck entzerrt, also als regelmäßiges Dreieck zu sehen.



Entzerrtes Dreieck

Damit wird der Schwerpunkt zum Mittelpunkt des Dreiecks.

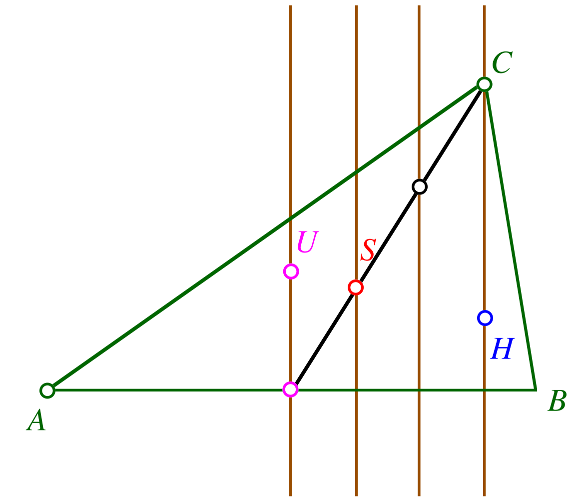
Ist das ein Beweis für den Sachverhalt, dass sich die drei Seitenhalbierenden (Schwerlinien) in einem Punkt schneiden?

Beim Verzerren und Entzerren bleiben Mittelpunkte von Seiten Mittelpunkte, und entsprechend sind Seitenhalbierende auch nach dem Verzerren oder Entzerren Seitenhalbierende.

Dies ändert sich allerdings, sobald Längen oder Winkel im Spiel sind, welche durch das Verzerren oder Entzerren geändert werden. Wir können also nicht mir dieser Methode begründen, warum die drei Höhen eines Dreieckes sich in einem Punkt schneiden.

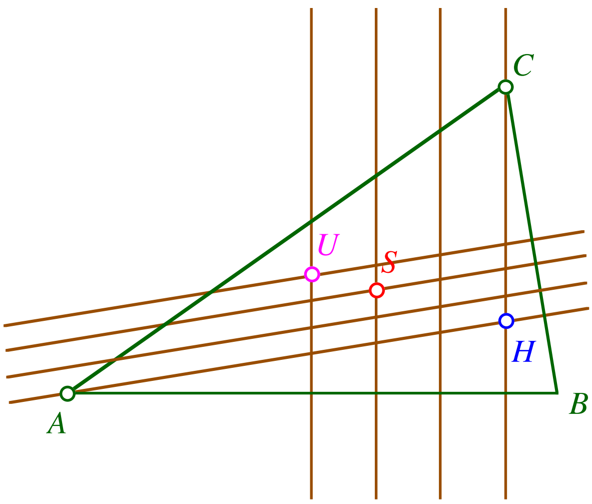
6 Raster

Es gibt aber gleichwohl Beispiele, wo bei Höhen mit einer Rasterung gearbeitet werden kann. So können wir in einem beliebigen Dreieck drei bleich breite zu einer Seite senkrechte Streifen einzeichnen, so dass der Umkreismittelpunkt, der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt je auf Streifenrändern liegen.



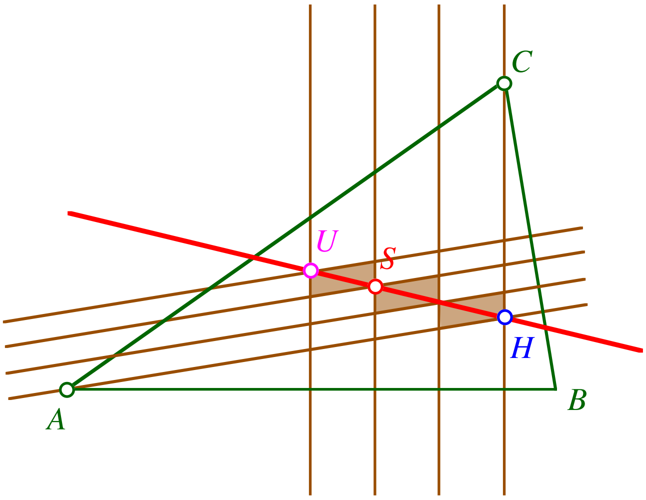
Drei Parallelstreifen senkrecht zur Grundseite

Ebenso können wir natürlich drei Streifen senkrecht zu einer zweiten Seite zeichnen; so entsteht ein Parallelogrammraster.



Parallelogrammraster

Wenn wir nun geeignete Parallelogramme färben, erkennen wir, dass der Umkreismittelpunkt, der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt auf einer Geraden liegen. Wir haben hier wiederum den Fall, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen. Kann dies auch so uminterpretiert werden, dass wir einen Schnittpunkt von drei oder mehr Geraden erhalten?



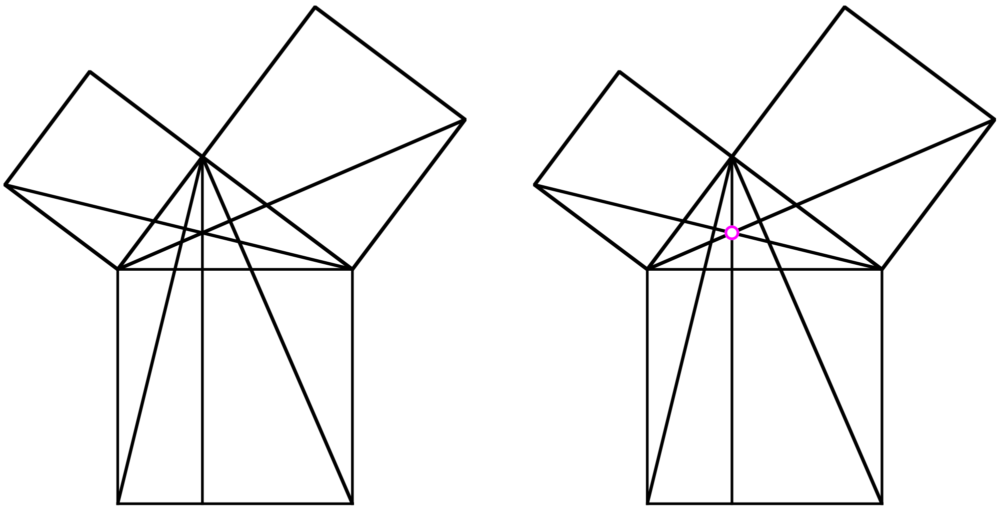
Die Eulersche Gerade

Diese Gerade wird nach Leonhart Euler (1707 – 1783) benannt.

Man kann sich nun allerdings fragen, wie das mit der Eulerschen Geraden im regelmäßigen Dreieck ist.

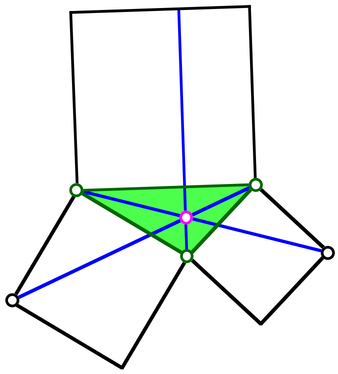
7 Mit und ohne Pythagoras

Für den Beweis des Satzes von Pythagoras verwendet Euklid (vgl. [Euklid 1980], S. 32) die folgende Figur. Diese Figur scheint einen Schnittpunkt zu enthalten.



Beweisfigur für den Satz von Pythagoras, mit Schnittpunkt

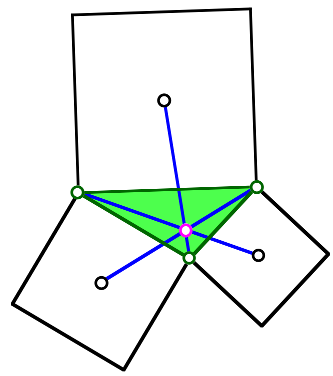
Das „Unschöne“ an diesem Schnittpunkt ist, dass er nicht nur für rechtwinklige Dreiecke, sondern allgemein gilt. Wir sind uns nur nicht so gewohnt, bei beliebigen Dreiecken Quadrate aufzusetzen, weil dort der Satz von Pythagoras nicht gilt.



Nicht Pythagoras!

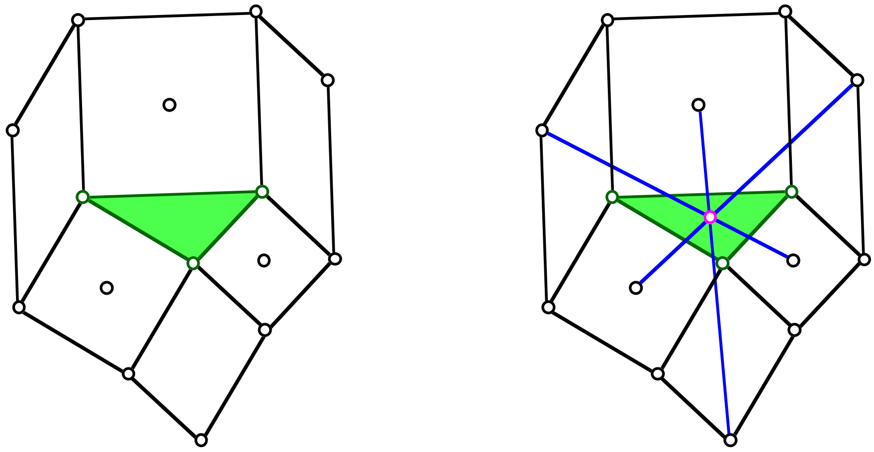
Dieser Schnittpunkt hat eine weitere Unschönheit: er ist in einem zyklischen Sinn asymmetrisch, in dem nicht alle drei Quadrate gleich behandelt werden.

Der folgende Schnittpunkt hat hingegen eine zyklische Symmetrie. Dieser Schnittpunkt liegt auf der Kiepertschen Hyperbel (vgl. [Eddy/Fritsch 1994]).



Zyklisch symmetrischer Schnittpunkt

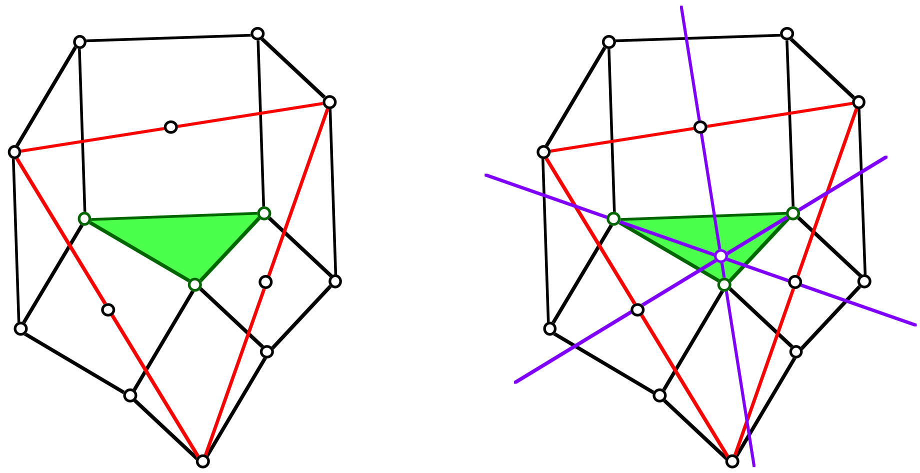
Die folgende Figur präsentierte ich kürzlich meinen Lehramtskandidaten in der Hoffnung, sie fänden den eingezeichneten Schnittpunkt.



Angefügte Parallelogramme. Schnittpunkt

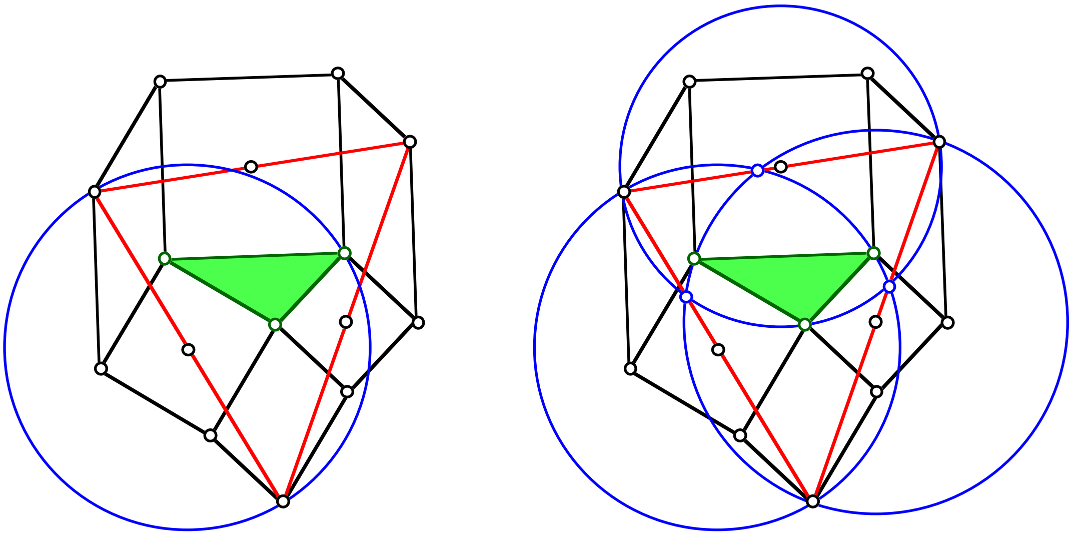
Stattdessen traten andere Feststellungen zu Tage.

Die äußeren Eckpunkte der Parallelogramme und die Quadratmitten liegen offenbar auf Geraden; die Quadratmitten sind die Seitenmitten des entstehenden Dreiecks. Die Mittelsenkrechten dieses neuen Dreiecks verlaufen durch Eckpunkte des ursprünglichen Dreieckes.



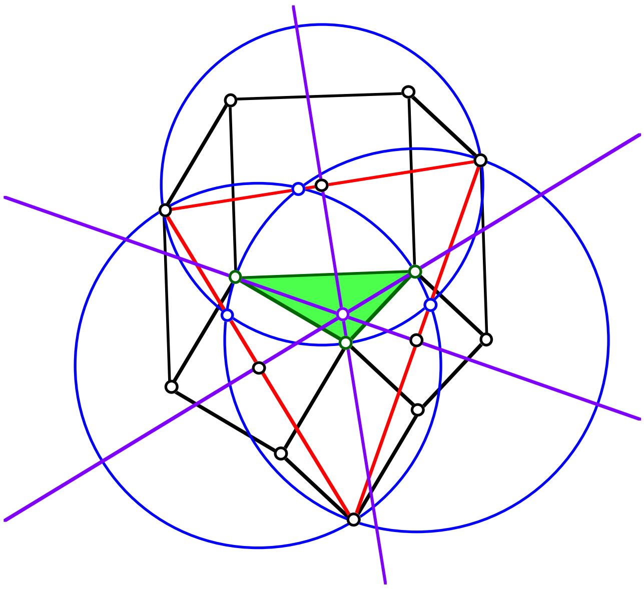
Feststellungen

Ein Thaleskreis über einer Seite des neuen Dreiecks verläuft ebenfalls durch einen Eckpunkt des ursprünglichen Dreieckes. Zwei solche Thaleskreise schneiden sich auf einer Seite des neuen Dreieckes, wir haben somit neue Schnittpunkt erhalten.



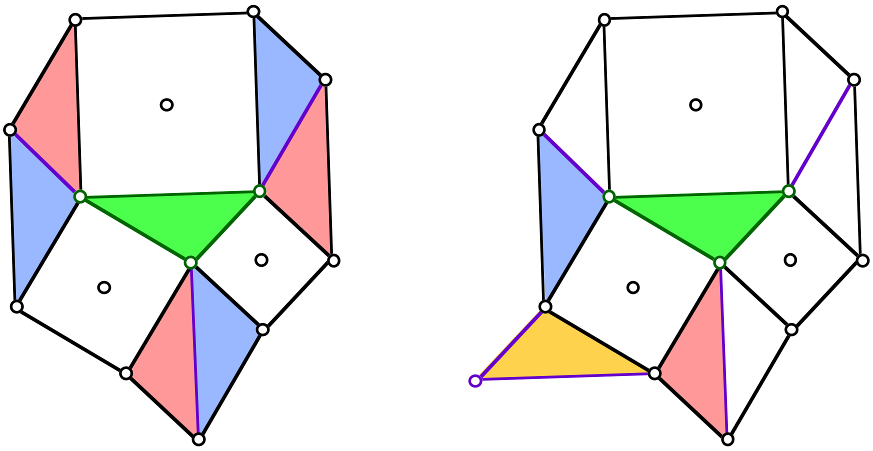
Thaleskreise über den Seiten des neuen Dreiecks

Die folgende Figur zeigt die Überlagerung aller dieser Feststellungen. Wie lässt sich dies alles beweisen?



Gesamtfigur

Ein wichtiger Tipp für den Beweis ist die Tatsache, dass die drei Parallelogramme so verschieden gar nicht sind; sie sind alle aus zum ursprünglichen Dreieck kongruenten Dreiecken zusammengesetzt. Dies gibt Anlass zu einer Windrädchenfigur, womit sich fast alles beweisen lässt.



Zerlegung der Parallelogramme. Windrädchen

Literatur

[Baptist 1992] Baptist, Peter: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. Mannheim: B.I.Wissenschaftsverlag 1992. ISBN 3-411-15661-9

[Donath 1976] Donath, Emil: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 3. Auflage 1976.

[Eddy/Fritsch 1994] Eddy, R.H. / Fritsch, R.: The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle. Mathematics Magazine. Vol. 67, No. 3, June 1994, p. 188-205

[Euklid 1980] Euklid: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1980. ISBN 3-534-01488-X

[Hauptmann 1995] Hauptmann, W.: Erzeugung „merkwürdiger Punkte“. PM Praxis der Mathematik 37, 1995, S. 8

[Hoehn 2001] Hoehn, Larry: Extriangles and Excevians. Mathematics Magazine, Vol. 74, No. 5, December 2001, p. 384-388

[Kimberling 1998] Kimberling, Clark: Triangle Centers and Central Triangles. Congr. Numer. 129 (1998), p. 1 – 295

[Klemenz 2003] Klemenz, Heinz: Merkwürdiges im Dreieck. VSMP Bulletin, herausgegeben vom Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer, No 91, Februar 2003, S. 16-23

[Walser 1990-1994] Walser, Hans: Schlußpunkt. Didaktik der Mathematik, 18 (1990) bis 22 (1994), jeweils letzte Heftseite

[Walser 1993] Walser, Hans: Die Eulersche Gerade als Ort "merkwürdiger Punkte". Didaktik der Mathematik (21), 1993, 95-98

[Walser 1994] Walser, Hans: Eine Verallgemeinerung der Winkelhalbierenden. Didaktik der Mathematik (22), 1994, S. 50-56

[Walser 2003] Walser, Hans: Eine Schar von Schnittpunkten im Dreieck. Praxis der Mathematik (2/45), 2003, S. 66 - 68

[Walser 2004] Walser, Hans: 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2004. ISBN 3-937219-10-2