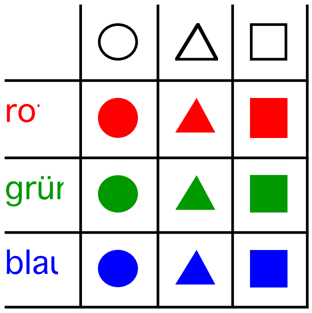
Hans Walser

Das Problem der Unordnung

1 Spielmaterial

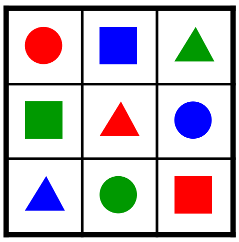
Wir haben drei Farben (rot, grün, blau) und drei Formen (Kreis, Dreieck, Quadrat). Ein ordentlicher Mensch stellt das so dar:



Jedes Ding an seinem Ort, ersparet manches böse Wort.

2 Unordnung

Nun versuchen wir es mit maximaler Unordnung. Das heißt wohl: In jeder Zeile und in jeder Spalte jede Farbe und jede Form. Versuchen Sie's. Beispiel:



Maximale Unordnung

Auweia: Jetzt sehen wir in der einen Diagonalen rot und in der anderen dreieckig.

Frage: Wie viele maximal unordentliche Quadrate gibt es?

Bearbeitung

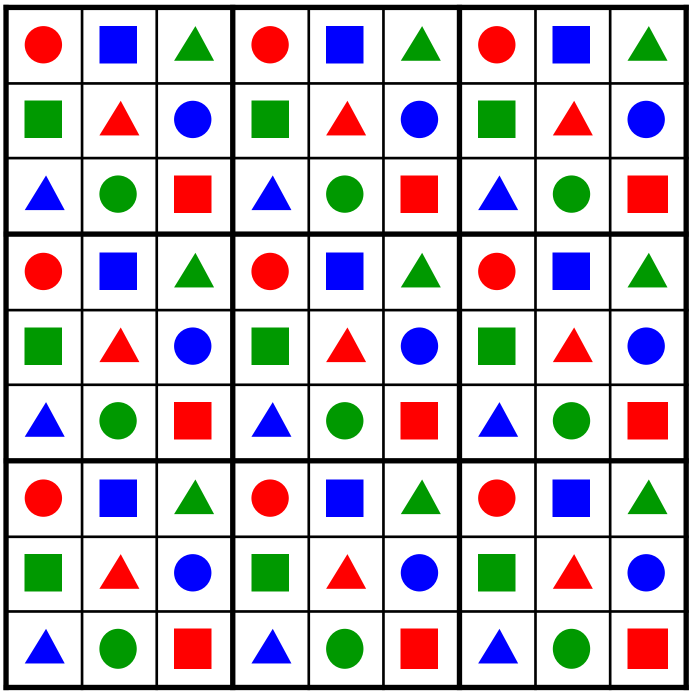
Wir beginnen im Feld links oben und haben dort alle 9 Möglichkeiten, ein Element zu legen. Im Feld rechts daneben haben wir nur noch 4 Möglichkeiten; eine Farbe und eine Form sind gesperrt durch das erste Feld. Im letzten Feld in der ersten Zeile haben wir nur noch eine Möglichkeit, die Belegung ist zwangsläufig.

Im ersten Feld in der mittleren Zeile gibt es nochmals zwei Möglichkeiten: das Feld links oben sperrt eine Farbe und eine Form. Von den verbleibenden vier Möglichkeiten sind aber zwei schon oben Mitte und oben rechts verbraucht.

Bei allen restlichen Feldern folgt die Belegung zwangsläufig.

Somit haben wir insgesamt $9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten.

Wenn wir die Quadrate repetitiv aneinander setzen, wird es noch schöner:

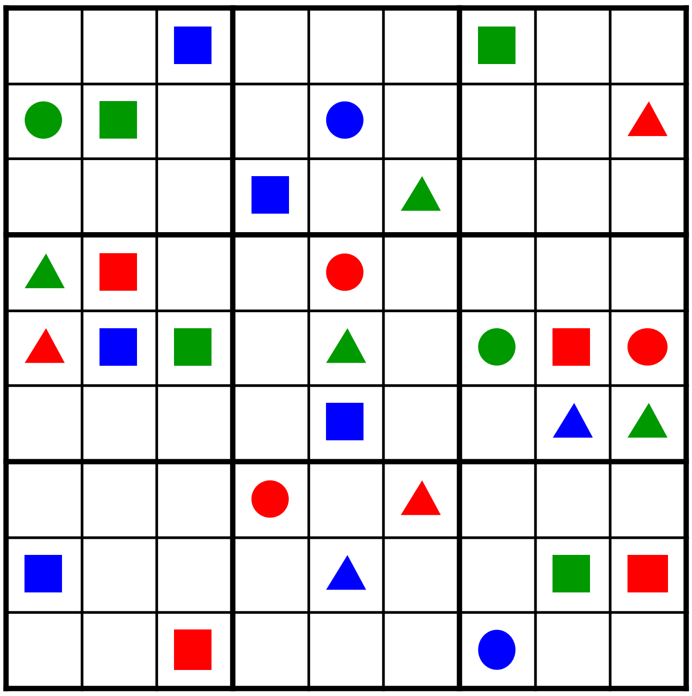


Wiederholung

In der einen Schrägen haben wir die Farben, in der anderen die Formen. Eine fast beängstigende Ordnung.

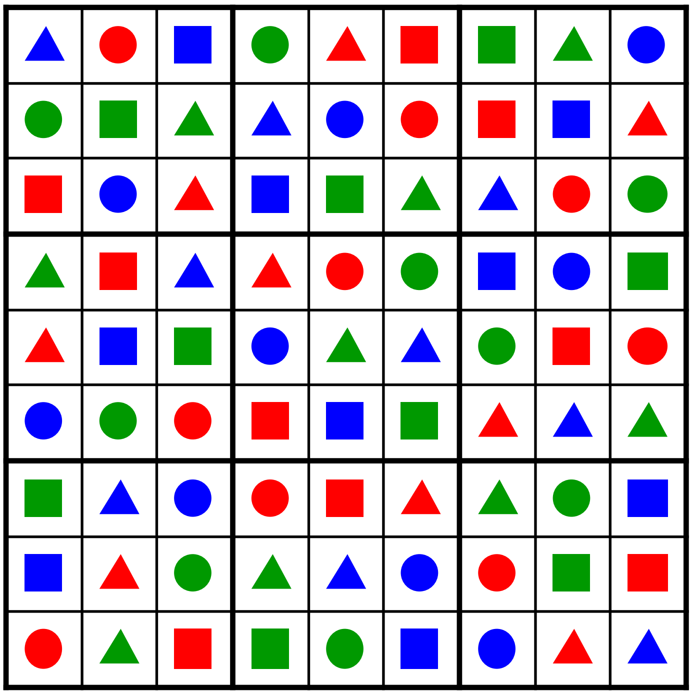
3 Zwischenspiel: Sudoku

In jeder Spalte und in jeder Zeile und in jedem 3×3-Kästchen muss jede Farb-Form-Kombination vorkommen. Viel Vergnügen!



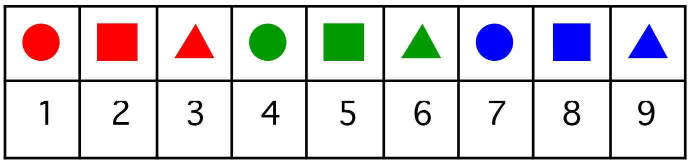
Sudoku

Lösung:



Lösung

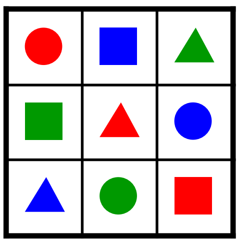
Lösungstipp: Codieren (egal wie) und dann wie ein normales Sudoku bearbeiten.



Beispiel einer Codierung

4 Zurück zur Unordnung

Das Codieren hilft auch in unserem unordentlichen kleinen Quadrat zu Einsichten. Es gibt zwei Kriterien, Farbe und Form.



Maximale Unordnung

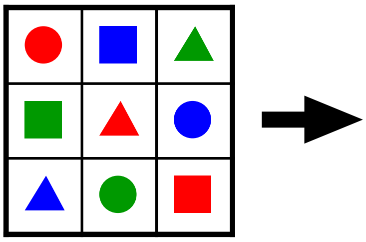
Wir codieren daher zweistellig mit (Farbe / Form). Dabei erinnern wir uns, dass die Erfindung der Null eine der größten Kulturleistungen der Menschheit ist – wir schulden diese Erfindung den Indern.

Farbcoc	
ro	0
grür	1
blau	2

Formcoc	
○	0
□	1
△	2

Beispiel einer Codierung

Das blaue Quadrat erhält somit den Code (blau / Quadrat) = 21. Wir codieren entsprechend das ganze unordentliche Quadrat:



00	21	12
11	02	20
22	10	01

Zweistellig codiert

Wenn wir die Codierung als Dezimalzahlen interpretieren, haben wir in jeder Zeile und in jeder Spalte die Summe 33. Warum?

Nun codieren wir nochmals um: Wir fassen die „Zehner“ als „Dreier“ auf. Statt

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

interpretieren wir:

$$21 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Klartext: Wir interpretieren die Zahlen im Positionssystem zur Basis Drei und rechnen ins Dezimalsystem um. Es gilt der Schlüssel:

Dezimalsystem	Dreiersystem
0	0
1	1
2	2
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22
9	100

Umrechnungsschlüssel

Damit erhalten wir:

00	21	12
11	02	20
22	10	01

→

0	7	5
4	2	6
8	3	1

Übersetzung ins Dezimalsystem

Und nun addieren wir noch 1:

0	7	5
4	2	6
8	3	1

→

1	8	6
5	3	7
9	4	2

Addition von 1

Jetzt haben wir eine „Hexenhäuschen“ (Ausdruck einer Schülerin): Zahlen von 1 bis 9; in jeder Spalte und in jeder Zeile gibt es die Summe 15.

1	8	6	15
5	3	7	15
9	4	2	15
15	15	15	

Hexenhäuschen

Mit irgend einem maximal unordentlichen Quadrat ergibt dieses Codierungsverfahren schließlich ein Hexenhäuschen. Warum? Hexenhäuschen sind keine „magischen Quadrate“; in den Diagonalen stimmt es nicht mit der Summe.

Was hat das alles mit Euler zu tun?

5 Das Problem der 36 Offiziere

5.1 n = 6

Es wird berichtet, dass Leonhard Euler, der ab 1766 wieder in St. Petersburg lebte und arbeitete, von der Zarin Katharina der Großen folgende Aufgabe erhielt:

Zum Divisionsball ordnet jedes der sechs anwesenden Regimenter für jeden der sechs Dienstgrade je einen Offizier ab: Diese sechsunddreißig Offiziere sollen zur Feier des Tages so im Quadrat aufgestellt werden, dass in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Offizier eines jeden Regiments und eines jeden Dienstgrades steht.

Wir haben also ebenfalls zwei Kriterien, Regiment und Dienstgrad, zu jedem Kriterium sechs Fälle. Das Problem ist dasselbe wie bei unserem Beispiel mit Farbe und Form, aber doppelt (oder viermal?) so umfangreich und unendlich viel schwieriger. Euler fand keine Lösung.

5.2 n = 5

Euler codierte die beiden Kriterien mit lateinischen und griechischen Buchstaben. Für ein 5×5-Quadrat sieht das dann so aus:

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

Eulerquadrat für $n = 5$

Sehen wir ein „System“ im obigen Beispiel?

Bearbeitung

Die lateinischen Buchstaben sind zeilenweise immer in derselben zyklischen Anordnung:

A B C D E

Die Anordnung ist aber in jeder Zeile gegenüber der oberen Zeile um eine Einheit nach links verschoben.

Die griechischen Buchstaben sind spaltenweise immer in derselben zyklischen Anordnung:

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array}$$

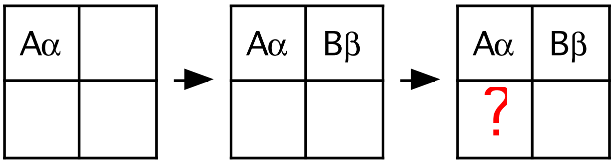
Die Anordnung ist aber in jeder Spalte gegenüber der Vorgängerspalte um zwei Einheiten nach unten verschoben.

5.3 n = 2

Dass es für $n = 2$ nicht geht, ist sofort klar. Warum?

Bearbeitung

Wenn wir links oben mit $A\alpha$ anfangen, folgt:



Versuch

Im Feld links unten müsste wieder $B\beta$ stehen, das ist aber bereits rechts oben gesetzt.

5.4 Eine nicht zutreffende Vermutung

Euler vermutete auf Grund seiner Arbeiten, dass es für alle Zahlen eine Lösung gibt außer für 2, 6, 10, 14, ... Einen Beweis fand er nicht. Tatsächlich ist die Vermutung der Nichtexistenz einer Lösung nur richtig für 2 und 6. Erst 1901 wurde vom französischen Mathematiker Gaston Tarry die Nichtexistenz einer Lösung für $n = 6$ bewiesen. Und erst 1959 fanden die amerikanischen Mathematiker Bose und Shrikhande mit Hilfe von Computern ein Gegenbeispiel (also eine Lösung) für $n = 10$. Schließlich bewiesen 1960 Parker, Bose und Shrikhande, dass Eulers Vermutung falsch ist für alle Zahlen größer oder gleich 10.

6 ... und was sagt Euler dazu?

6.1 Griechisch-lateinische Quadrate

Ich habe mit dieser Methode eine sehr grosse Zahl derartiger umgeformter Quadrate untersucht, ohne ein einziges anzutreffen, das nicht denselben Fehler aufgewiesen hätte: dass es nämlich kein System von “Konstruktionsformeln” gab, bei dem nicht die eine oder andere vertikale Reihe eine Zahl zweimal enthielt. Ich zögere nicht, daraus zu schliessen, dass man kein vollständiges Quadrat von 36 Feldern herstellen kann, und dass dieselbe Unmöglichkeit sich auf die Fälle n = 10, n = 14 und allgemein auf alle “ungerade geraden” Zahlen [d.h. Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 2 haben] erstreckt.

J’ai examiné par cette méthode un très grand nombre de quarrés transformés semblables, sans en rencontrer un seul qui n'ait eu le même inconvénient, de ne fournir aucun Système de directrices dont l’une ou l'autre bande verticale ne renfermât un nombre deux fois, et je n'ai pas hésité d'en conclure qu'on ne sauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la meme impossibilité s'étende aux cas de n = 10, n = 14 et en général à tous les nombres impairement pairs.

E 530, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques, Vlissingen 1782 - Opera I 7, p.291-392.