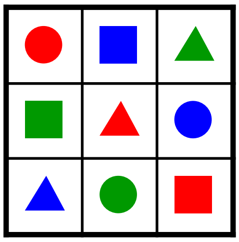
Hans Walser



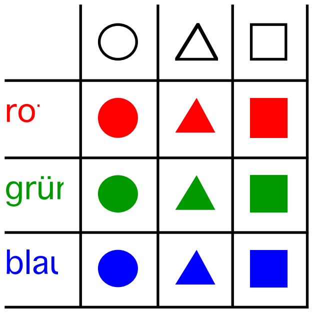
Das Problem der Unordnung

Kolloquium 6. Dezember 2007
Karlsruhe

Inhalt

1 Spielmaterial

Wir haben drei Farben (rot, grün, blau) und drei Formen (Kreis, Dreieck, Quadrat). Ein ordentlicher Mensch stellt das so dar:

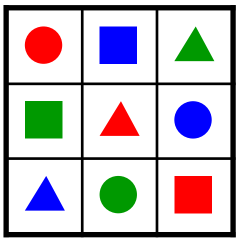


Jedes Ding an seinem Ort, ersparet manches böse Wort.

Es geht auch mit Jasskarten, zum Beispiel mit den drei Farben Schilten, Rosen und Schellen und den drei Werten Banner, König und Sau.

2 Unordnung

Nun versuchen wir es mit maximaler Unordnung. Das heißt wohl: In jeder Zeile und in jeder Spalte jede Farbe und jede Form. Versuchen Sie's. Beispiel:

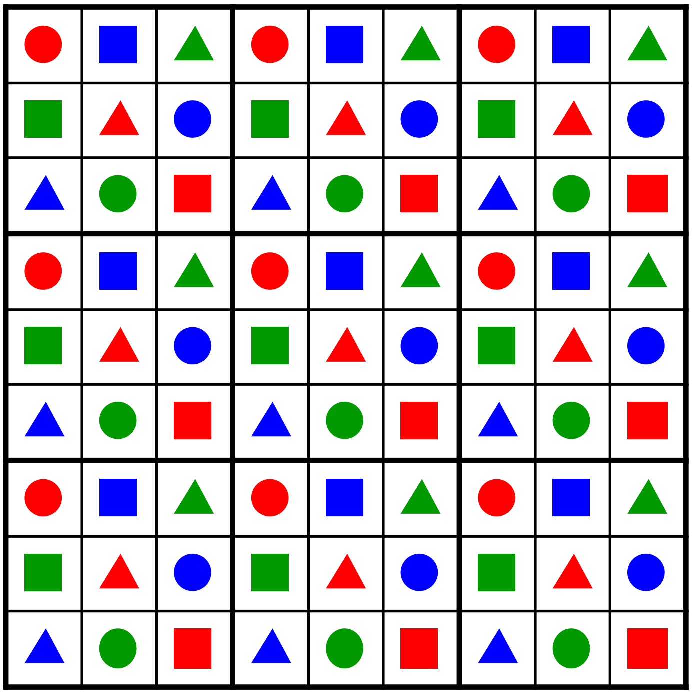


Maximale Unordnung

Auweia: Jetzt sehen wir in der einen Diagonalen rot und in der anderen dreieckig.

> **Problem 1: Jasskarten**
> Wie sieht die maximale Unordnung mit Jasskarten aus?
>
> **Problem 2: Abzählen**
> Wie viele maximal unordentliche Quadrate gibt es?

Wenn wir die Quadrate repetitiv aneinander setzen, wird es noch schöner:



Wiederholung

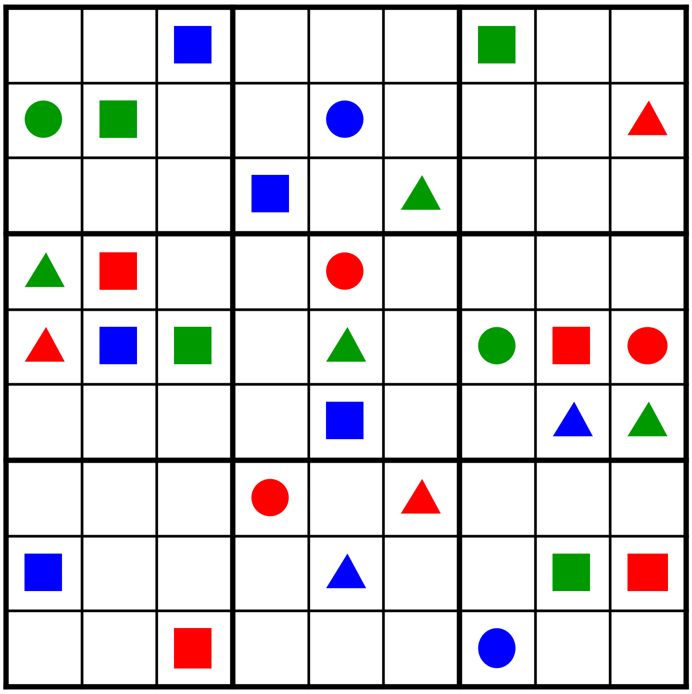
In der einen Schrägen haben wir die Farben, in der anderen die Formen. Eine fast beängstigende Ordnung.

Problem 3: Wissensfrage

Welcher Symmetrietyp liegt vor?

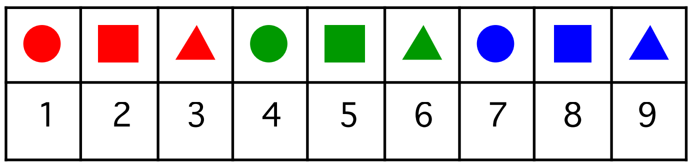
Problem 4: Sudoku

In jeder Spalte und in jeder Zeile und in jedem 3×3-Kästchen muss jede Farb-Form-Kombination vorkommen. Viel Vergnügen!



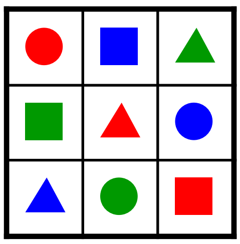
Sudoku

Lösungstipp: Codieren und dann wie ein normales Sudoku bearbeiten.



Beispiel einer Codierung

Problem 5: Codierung der Unordung

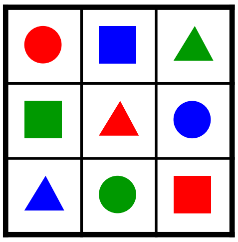


Codierung ?

Was ergibt sich, wenn wir die maximale Unordnung mit obigem Schlüssel codieren? Warum ist das so?

2.1 Zweistellige Codierung

Das Codieren hilft auch in unserem unordentlichen kleinen Quadrat zu Einsichten. Es gibt zwei Kriterien, Farbe und Form.



Maximale Unordnung

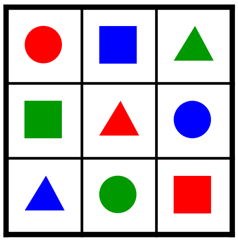
Wir codieren daher zweistellig mit (Farbe / Form). Dabei erinnern wir uns, dass die Erfindung der Null eine der größten Kulturleistungen der Menschheit ist – wir schulden diese Erfindung den Indern.

Farbcoc	
ro	0
grür	1
blau	2

Formcoc	
○	0
□	1
△	2

Beispiel einer Codierung

Das blaue Quadrat erhält somit den Code (blau / Quadrat) = 21. Wir codieren entsprechend das ganze unordentliche Quadrat:



00	21	12
11	02	20
22	10	01

Zweistellig codiert

2.2 Umcodierung in Dezimalzahlen

Wenn wir die Codierung als Dezimalzahlen interpretieren, haben wir in jeder Zeile und in jeder Spalte die Summe 33.

2.3 Umcodierung: Ballast raus

Bei unseren Dezimalzahlen erscheinen nur solche mit den Ziffern 0, 1 oder 2. Wir streichen alle Zahlen mit anderen Ziffern raus und schieben zusammen. Dann nummerieren wir neu.

Mut zu Lücke Mut zu Lücke

00	01	02	10	11	12	20	21	22
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Mut zur Lücke

Problem 6

Wie kann man das auch kompliziert machen?

Mit dieser Umcodierung erhalten wir:

00	21	12
11	02	20
22	10	01

0	7	5
4	2	6
8	3	1

Umcodieren

Und nun addieren wir noch 1:

0	7	5
4	2	6
8	3	1

1	8	6
5	3	7
9	4	2

Addition von 1

Jetzt haben wir eine „Hexenhäuschen“ (Ausdruck einer Schülerin): Zahlen von 1 bis 9; in jeder Zeile und in jeder Spalte gibt es die Summe 15.

1	8	6	15
5	3	7	15
9	4	2	15
15	15	15	

Hexenhäuschen

Mit irgend einem maximal unordentlichen Quadrat ergibt unser Codierungsverfahren schließlich ein Hexenhäuschen.

Problem 7

Warum entstehen immer die Zeilen- und Spaltensummen 15?

Problem 8

Welche Assoziationen haben Sie zu *Hexenhäuschen*?

Problem 9

Ergänzen Sie zu Hexenhäuschen:

a)

1	2	
3	4	
		5

b)

5		12
	3	
−7		8

Hexenhäuschen sind keine „magischen Quadrate“; in den Diagonalen stimmt es nicht mit der Summe. Hingegen sind magische Quadrate auch Hexenhäuschen.

Problem 10

Suchen Sie ein magisches Quadrat mit 3×3 Feldern.

3 Das Problem der 36 Offiziere

Es wird berichtet, dass Leonhard Euler, der ab 1766 wieder in St. Petersburg lebte und arbeitete, von der Zarin Katharina der Großen folgende Aufgabe erhielt:

Zum Divisionsball ordnet jedes der sechs anwesenden Regimenter für jeden der sechs Dienstgrade je einen Offizier ab: Diese sechsunddreißig Offiziere sollen zur Feier des Tages so im Quadrat aufgestellt werden, dass in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Offizier eines jeden Regiments und eines jeden Dienstgrades steht.

Wir haben also ebenfalls zwei Kriterien, Regiment und Dienstgrad, zu jedem Kriterium sechs Fälle. Das Problem ist dasselbe wie bei unserem Beispiel mit Farbe und Form, aber doppelt (oder viermal?) so umfangreich und viel schwieriger. Euler fand keine Lösung.

Es wird berichtet, dass über 36 Nachkommen Eulers in der russischen Armee dienten. Wenn Euler lange genug gelebt hätte, hätte er das Problem mit eigenen Leuten durchspielen können.

3.1 Codierung von Euler

Euler codierte die beiden Kriterien mit lateinischen und griechischen Buchstaben; daher neben *Eulerquadrat* auch die Bezeichnung *lateinisch-griechisches Quadrat*. Für ein 5×5-Quadrat sieht das dann so aus:

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

Eulerquadrat für $n = 5$

Problem 11

Sehen wir ein „System“ im obigen Beispiel?

Problem 12

Für $n = 2$ geht es nicht. Warum?

Problem 13

Gibt es Beispiele für $n = 4$?

Problem 14: Melencolia

Analyse des magischen 4×4-Quadrates in Dürers *Melencolia*.

3.2 ... und was sagt Euler dazu?

Ich habe mit dieser Methode eine sehr große Zahl derartiger umgeformter Quadrate untersucht, ohne ein einziges anzutreffen, das nicht denselben Fehler aufgewiesen hätte: dass es nämlich kein System von “Konstruktionsformeln” gab, bei dem nicht die eine oder andere vertikale Reihe eine Zahl zweimal enthielt. Ich zögere nicht, daraus zu schließen, dass man kein vollständiges Quadrat von 36 Feldern herstellen kann, und dass dieselbe Unmöglichkeit sich auf die Fälle $n = 10$, $n = 14$ und allgemein auf alle “ungerade geraden” Zahlen [d.h. Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 2 haben] erstreckt.

Original Euler:

J’ai examiné par cette méthode un très grand nombre de quarrés transformés semblables, sans en rencontrer un seul qui n'ait eu le même inconvénient, de ne fournir aucun Système de directrices dont l’une ou l'autre bande verticale ne renfermât un nombre deux fois, et je n'ai pas hésité d'en conclure qu'on ne sauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la meme impossibilité s'étende aux cas de $n = 10$, $n = 14$ et en général à tous les nombres impairement pairs.

E 530, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques, Vlissingen 1782 - Opera I 7, p.291-392.

Die Formulierung *impairement pair* (ungerade gerade) ist ein so genanntes *Oxymoron*. Damit meint man eine (oft ironische) Redefigur, welche sich selber widerspricht.

Problem 15: Eulers Oxymoron

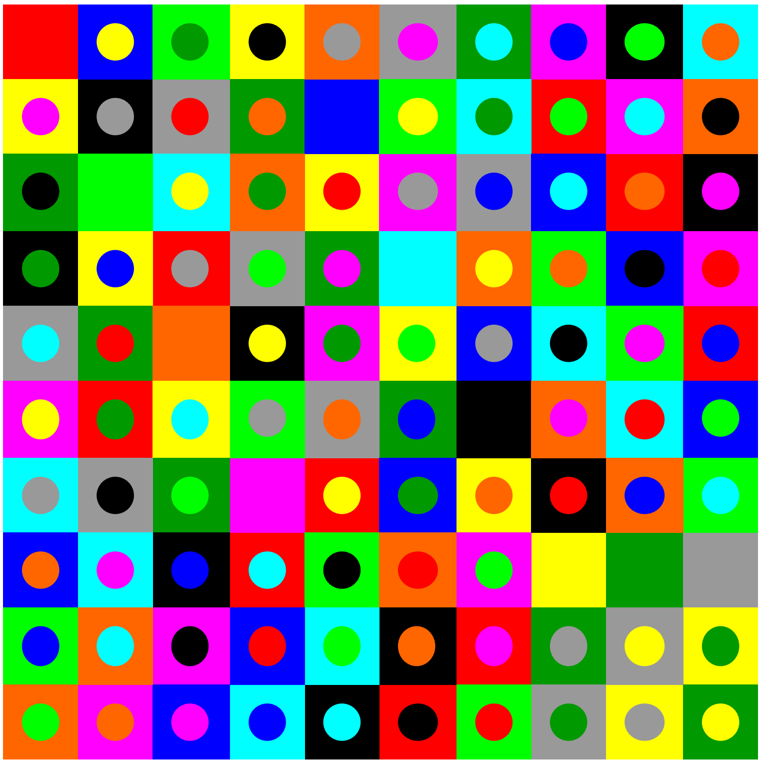
Was meint Euler mit seiner Formulierung *impairement pair*?

Problem 16: Oxymoron

Kennen Sie ein eigenes Beispiel eines Oxymorons?

3.3 Eine nicht zutreffende Vermutung

Euler vermutete, dass es für alle Zahlen eine Lösung gibt außer für 2, 6, 10, 14, ... Einen Beweis fand er nicht. Tatsächlich ist die Vermutung der Nichtexistenz einer Lösung nur richtig für 2 und 6. Erst 1901 wurde vom französischen Mathematiker Gaston Tarry die Nichtexistenz einer Lösung für $n = 6$ bewiesen. Und erst 1959 fanden die amerikanischen Mathematiker Bose und Shrikhande mit Hilfe von Computern ein Gegenbeispiel (also eine Lösung) für $n = 10$.



Lösung für $n = 10$ (nach [Wagner])

Schließlich bewiesen 1960 Parker, Bose und Shrikhande, dass Eulers Vermutung falsch ist für alle Zahlen größer oder gleich 10.

4 Der Vektorraum

Wir verallgemeinern den Begriff des Hexenhäuschens, indem wir als Einträge beliebige Zahlen zulassen, also nicht mehr nur die natürlichen Zahlen von 1 bis 9. Es müssen lediglich die Spalten- und Zeilensummen übereinstimmen.

3	–1	8
3	5	2
4	6	0

Hexenhäuschen

Die (elementweise) Summe zweier Hexenhäuschen ist wieder ein Hexenhäuschen:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & -1 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 6 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 7 & -2 \\ \hline -3 & 5 & 9 \\ \hline 8 & -1 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 9 & 6 & 6 \\ \hline 0 & 10 & 11 \\ \hline 12 & 5 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Summe zweier Hexenhäuschen

Ebenso ergibt die skalare Multiplikation wieder ein Hexenhäuschen:

$$3\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & -1 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 6 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 9 & -3 & 24 \\ \hline 9 & 15 & 6 \\ \hline 12 & 18 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Skalare Multiplikation

Die Hexenhäuschen bilden also einen Vektorraum.

Problem 17: Dimension
Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

Problem 18: Basis
Basis dieses Vektorraumes?

Problem 19: Magische Quadrate
Bilden die magischen 3×3 Quadrate auch einen Vektorraum?

Problem 20: Dimension
a) Welche Dimension hat der Vektorraum der 4×4-Hexenhäuschen?

b) Welche Dimension hat der Vektorraum der $n \times n$-Hexenhäuschen?

Problem 21: Matrixprodukt
Die beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 11 \\ 10 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

sind Hexenhäuschen. Sind die Matrizen $C = AB$, $D = BA$ und $F = AA = A^2$ ebenfalls Hexenhäuschen?

Problem 22: Matrixprodukt
Ist das Matrixprodukt zweier Hexenhäuschen wieder ein Hexenhäuschen?

5 Lösungshinweise zu den Problemen

Zu Problem 1

Zu Problem 2

Wir beginnen im Feld links oben und haben dort alle 9 Möglichkeiten, ein Element zu legen. Im Feld rechts daneben haben wir nur noch 4 Möglichkeiten; eine Farbe und eine Form sind gesperrt durch das erste Feld. Im letzten Feld in der ersten Zeile haben wir nur noch eine Möglichkeit, die Belegung ist zwangsläufig.

Im ersten Feld in der mittleren Zeile gibt es nochmals zwei Möglichkeiten: das Feld links oben sperrt eine Farbe und eine Form. Von den verbleibenden vier Möglichkeiten sind aber zwei schon oben Mitte und oben rechts verbraucht.

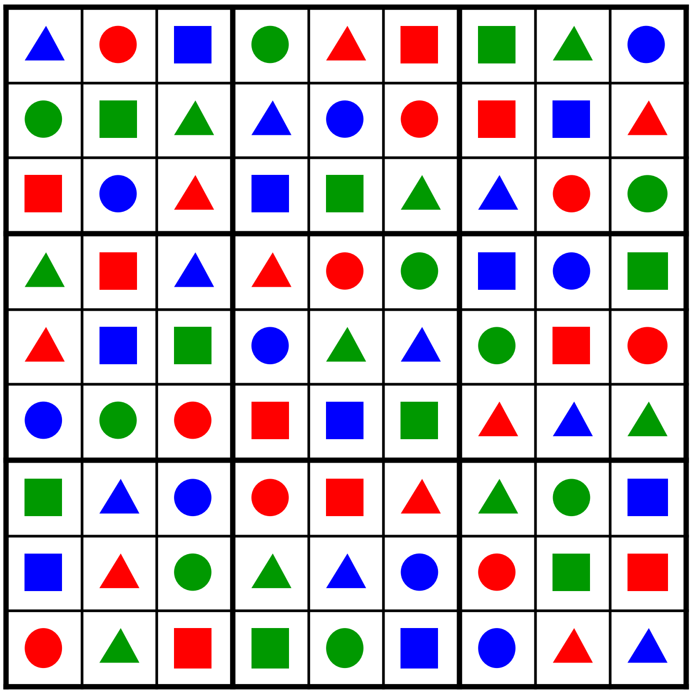
Bei allen restlichen Feldern folgt die Belegung zwangsläufig.

Somit haben wir insgesamt $9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten.

Zu Problem 3

Translationssymmetrie

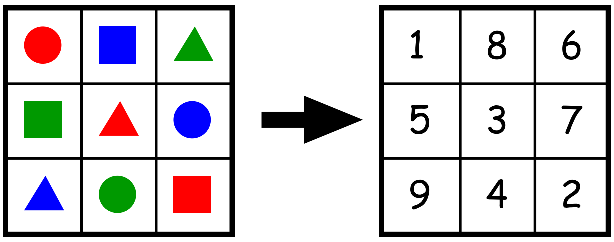
Zu Problem 4



Lösung

Zu Problem 5

Wir erhalten:



Codierung

Zeilensummen und Spaltensummen sind konstant. Warum?

Zu Problem 6

Wir fassen die „Zehner“ als „Dreier“ auf. Statt

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

interpretieren wir:

$$21 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Wir interpretieren die Zahlen im Positionssystem zur Basis Drei und rechnen ins Dezimalsystem um.

Zu Problem 7

In jeder Spalte und in jeder Zeile kommen (ins Dezimalsystem umgerechnet) genau die Zahlen 1, 2, 3 („Einer“ plus Addition von 1) sowie 0, 3, 6 („Dreier“) vor. Das gibt die Summe 15.

Zu Problem 8

Hänsel und Gretel ist eines der vielen Märchen aus der Sammlung der "Kinder- und Hausmärchen" der Brüder Grimm.

Hexenhaus

Zu Problem 9

a)

1	2	2
3	4	–2
1	–1	5

b)

5	–2	12
17	3	–5
–7	14	8

Zu Problem 10

Beispiel:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Magisches Quadrat

Bemerkung: Im Zentrum eines magischen Quadrates muss immer die 5 stehen.

Zu Problem 11

Die lateinischen Buchstaben sind zeilenweise immer in derselben zyklischen Anordnung:

A B C D E

Die Anordnung ist aber in jeder Zeile gegenüber der oberen Zeile um eine Einheit nach links verschoben.

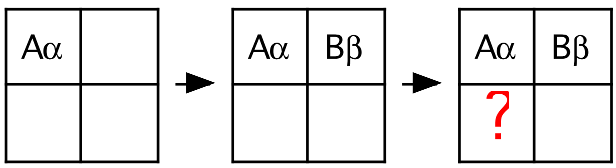
Die griechischen Buchstaben sind spaltenweise immer in derselben zyklischen Anordnung:

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array}$$

Die Anordnung ist aber in jeder Spalte gegenüber der Vorgängerspalte um zwei Einheiten nach unten verschoben.

Zu Problem 12

Wenn wir links oben mit Aα anfangen, folgt:

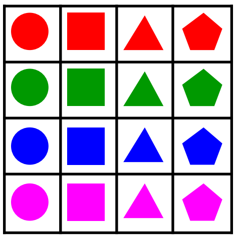


Versuch

Im Feld links unten müsste wieder Bβ stehen, das ist aber bereits rechts oben gesetzt.

Zu Problem 13

Wir verwenden das angegebene Spielsortiment mit Codierung.

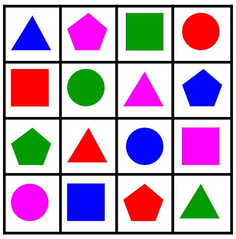


Farbcoc	
ro	0
grür	1
blaı	2
lila	3

Formcoc	
○	0
□	1
△	2
⬠	3

Sortiment und Codierung

Eine Lösung ist zum Beispiel:



►

22	33	11	00
01	10	32	23
13	02	20	31
30	21	03	12

►

10	15	5	0
1	4	14	11
7	2	8	13
12	9	3	6

►

11	16	6	1
2	5	15	12
8	3	9	14
13	10	4	7

Exemplarische Lösung

Zu Problem 14

Wir verwenden die Codes

Farbcoc	
ro	0
grür	1
blaı	2
lila	3

Formcoc	
○	0
□	1
△	2
⬠	3

Codes

und arbeiten rückwärts:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

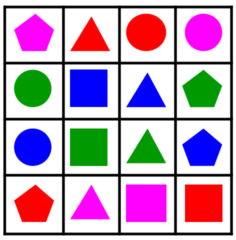
►

15	2	1	12
4	9	10	7
8	5	6	11
3	14	13	0

►

33	02	01	30
10	21	22	13
20	11	12	23
03	32	31	00

►



Analyse

Wir sehen, dass die Bedingung verletzt ist, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Farbe und jede Form genau ein Mal erscheint. Wir haben eine wirkliche Unordnung.

Es muss also auch andere Methoden geben, um magische Quadrate und Hexenhäuschen herzustellen.

Zu Problem 15

Die Zahlen 2, 6, 10, 14, ... sind gerade, wenn wir sie aber halbieren, ergeben sich ungerade Zahlen.

Oder: innerhalb der geraden Zahlen stehen sie in ungeraden Positionen.

Zu Problem 16

- *bittersüß*
- *verbessertes Vernichtungspotenzial* (Werbetext einer Waffenschmiede)
- Offizielle Gebührenvignette für *Kleinsperrgut*
- *Verdichteter Schaumstoff*
- *Bei Stau bitte weiterfahren!* (Verkehrsschild in meiner Wohngemeinde. Der Stau bezieht sich auf eine Kreiselausfahrt, welche in das Parkhaus eines Einkaufszentrums führt.)

Zu Problem 17

Wie viele Zahlen können bei Hexenhäuschen frei gewählt werden?

Zunächst können wir in der ersten Zeile jede Zahl frei wählen. Dadurch ist dann die Zeilen- und Spaltensumme festgelegt. In der zweiten Zeile sind dann nur noch die ersten beiden Zahlen frei wählbar; die dritte Zahl ist über die Zeilensumme festgelegt. Die dritte Zeile ist dann vollständig durch die Spaltensumme festgelegt. Bei der letzten Zahl in der dritten Spalten haben wir dann das Unbehagen, ob das mit der Zeilen- und Spaltensumme nicht zu Widersprüchen führt.

Schematisch sieht das so aus:

a	b	c
d	e	$(a+b+c)-(d+e)$
$(a+b+c)-(a+d)$	$(a+b+c)-(b+e)$	?

=

a	b	c
d	e	$a+b+c-d-e$
$b+c-d$	$a+c-e$	?

Die Zahlen *a, b, c, d, e* sind frei wählbar. Die Zeilen- und Spaltensumme ist dann $(a+b+c)$. Wenn wir das Element rechts unten über die Zeilensumme berechnen, ergibt sich:

$$(a+b+c)-(b+c-d)-(a+c-e)=-c+d+e$$

Wenn wir dasselbe Element über die Spaltensumme berechnen, ergibt sich dasselbe:

$$(a+b+c)-c-(a+b+c-d-e)=-c+d+e$$

Die Sache ist also in sich stimmig.

Da wir fünf Zahlen frei wählen können, ist es sinnvoll, dem Vektorraum der 3×3-Hexenhäuschen die Dimension 5 zuzuordnen.

Zu Problem 18

Es gibt viele Möglichkeiten.

Beispiel :

$$h_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&0\\\hline 0&0&1\\\hline 0&1&0\\\hline\end{array}\quad h_2=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline 1&0&0\\\hline\end{array}\quad h_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 0&0&1\\\hline 1&1&-1\\\hline\end{array}$$

$$h_4=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 1&0&-1\\\hline -1&0&1\\\hline\end{array}\quad h_5=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&1&-1\\\hline 0&-1&1\\\hline\end{array}$$

Beispiel ohne negative Zahlen:

$$k_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 1&1&0\\\hline 1&0&1\\\hline\end{array}\quad k_2=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&1\\\hline 1&1&0\\\hline 0&1&1\\\hline\end{array}\quad k_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&0\\\hline 1&1&0\\\hline 0&0&2\\\hline\end{array}$$

$$k_4=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 0&1&2\\\hline 2&1&0\\\hline\end{array}\quad k_5=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&0&2\\\hline 1&2&0\\\hline\end{array}$$

Zu Problem 19

Nein. Es genügt ein Gegenbeispiel. Im folgenden Beispiel stimmen in der Summe zwar noch die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen überein, aber es kommen nicht genau die Zahlen 1, 2, ... , 9 vor.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 8&1&6\\\hline 3&5&7\\\hline 4&9&2\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&9&4\\\hline 7&5&3\\\hline 6&1&8\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 10&10&10\\\hline 10&10&10\\\hline 10&10&10\\\hline\end{array}$$

Zu Problem 20

a) 10 b) $(n-1)^2+1$

Zu Problem 21

Alles Hexenhäuschen

$$C=AB=\begin{bmatrix}20&38&47\\1&49&55\\84&18&3\end{bmatrix},\ D=BA=\begin{bmatrix}7&51&47\\40&36&29\\58&18&29\end{bmatrix},\ F=AA=A^2=\begin{bmatrix}78&54&93\\119&91&15\\28&80&117\end{bmatrix}$$

Zu Problem 22

Die zwei $n\times n$-Matrizen $A=\left[a_{ik}\right]$ und $B=\left[b_{kj}\right]$ seien Hexenhäuschen mit Zeilen- und Spaltensummen s beziehungsweise t. Es ist also:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}=s \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}=t$$

Für die Produktmatrix $C = AB$ gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Für die *i*-te Zeilensumme von *C* erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{kj}}_{=t} = t \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}}_{=s} = st$$

Die Zeilensummen von *C* sind also konstant und gleich dem Produkt der Zeilensummen von *A* und *B*. Analog kann gezeigt werden, dass dies auch für die Spaltensummen gilt.

Quellen

[Wagner] Wagner, Andreas: Projektive und affine Inzidenzebenen im Kontext des Problems der 36 Offiziere. http://www.anwagner.de/eulersoffiziere.pdf (4.9.2007)