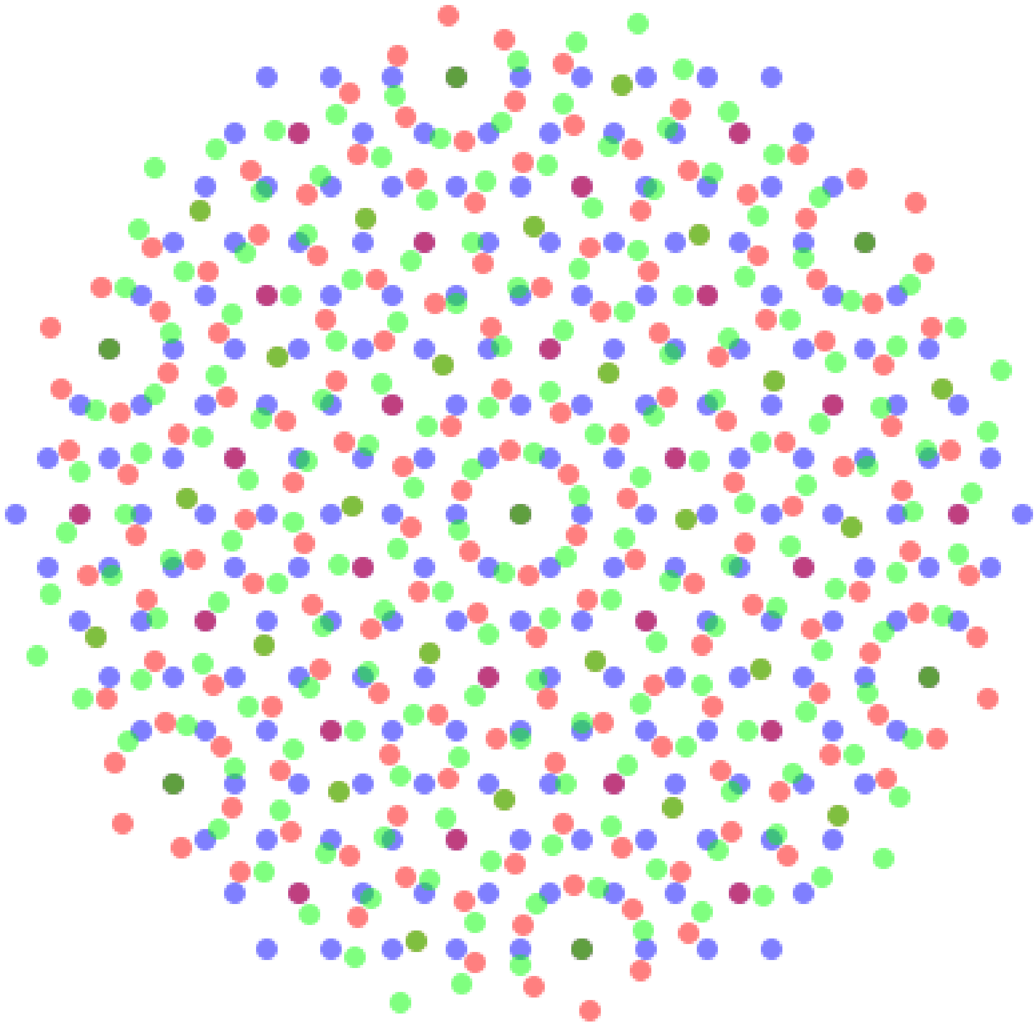
Hans Walser



Über Symmetrien und Ornamente

UNI
BASEL

Vortrag im Rahmen der Uni-Nacht Basel
Freitag, 19. September 2008, 18:00 Uhr und 20:30 Uhr
Rheinsprung 9-11, Hörsaal 118
Vortragsskript

1 Was ist Symmetrie?

Bei Symmetrien können wir etwas tun, ohne dass die anderen es merken. Beispiele:

1.1 Der Würfel mit drei Farben

Denken wir uns einen Würfel, der auf zwei gegenüberliegenden Seiten rot, auf zwei anderen gegenüberliegenden Seiten gelb und auf dem dritten Paar gegenüberliegender Seiten blau ist. Ein Bild kann ich dazu nicht geben, da es unmöglich ist, einen Würfel so darzustellen, dass wir gegenüberliegende Seiten beide sehen können.

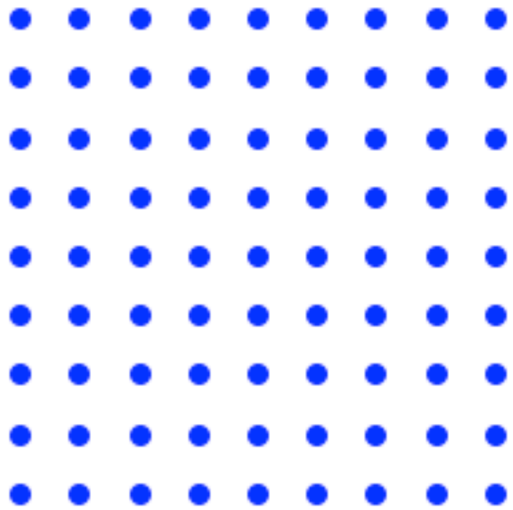
Was können wir mit diesem Würfel tun, ohne dass jemand, der zwischenzeitlich das Zimmer verlassen musste, es feststellen kann?

Es sind verschiedene Drehungen um jeweils 180° möglich, zum Beispiel um die senkrechte Achse, die oben und unten durch die Quadratmitte geht.

Vorwitzige Leute werden einwenden, man könne auch spiegeln, zum Beispiel an der horizontalen Mittelparallelebene zu Boden und Deckel. Das ist geometrisch richtig, aber an einem materiellen Würfelmodell nicht durchführbar.

1.2 Quadratischer Punktraster

Was können wir mit einem quadratischen Punktraster machen, ohne dass man das nachher sieht?



Quadratischer Punktraster

Wir können senkrecht, waagerecht oder diagonal spiegeln.

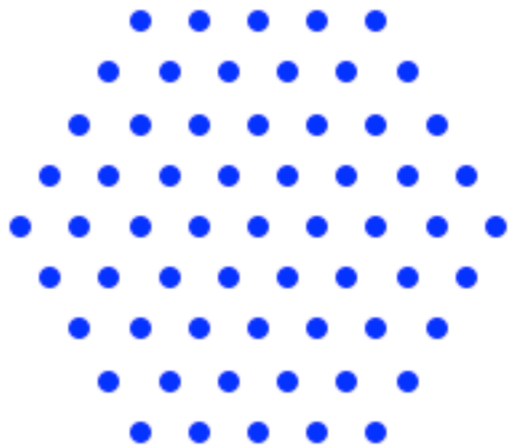
Wir können um 90°, 180°, 270°, 360° oder allgemein um ein Vielfaches von 90° drehen.

Wenn wir drei Häuschen nach rechts und zwei Häuschen nach oben schieben, merken die anderen es am Rand. Falls der Raster aber keinen Rand hat, also unendlich groß ist, merken die anderen nichts.

2 Punktraster als Werkstoff

2.1 Dreiecksraster

Roy Lichtenstein arbeitet häufig mit Dreiecksrastern. Dazu wurden Lochschablonen aus Blech verwendet.

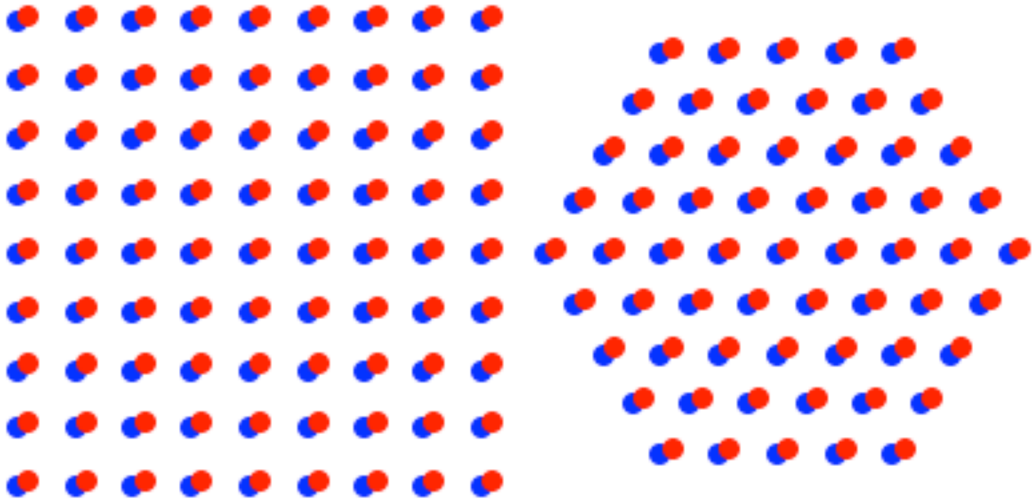


Dreiecksraster

Der Dreiecksraster hat ein anderes Symmetrieverhalten als der Quadratraster. Wir können zum Beispiel um 60° oder ein Vielfaches davon drehen, nicht aber um 90°.

3 Kleine Verschiebung

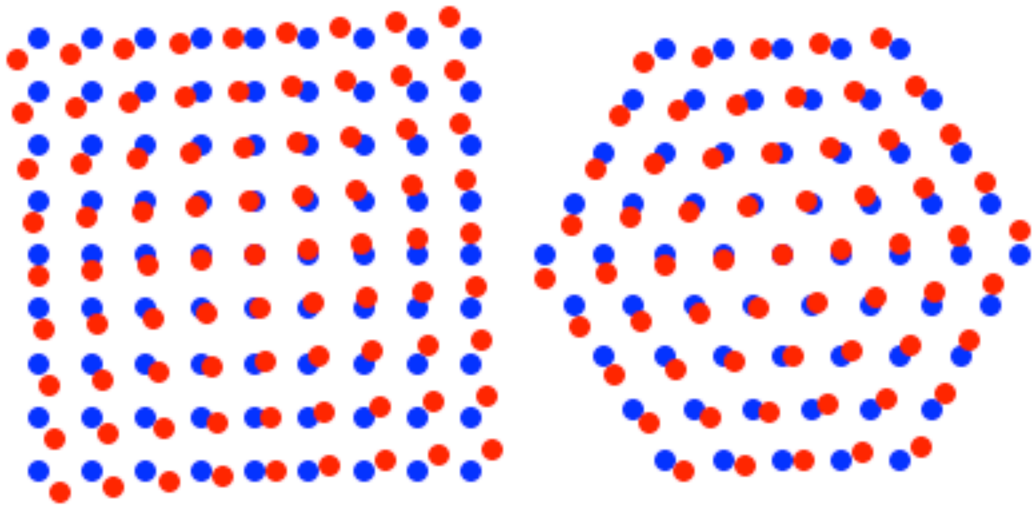
Eine kleine Verschiebung (Translation) führt zu einem Schatten.



Schatten

4 Kleine Drehung

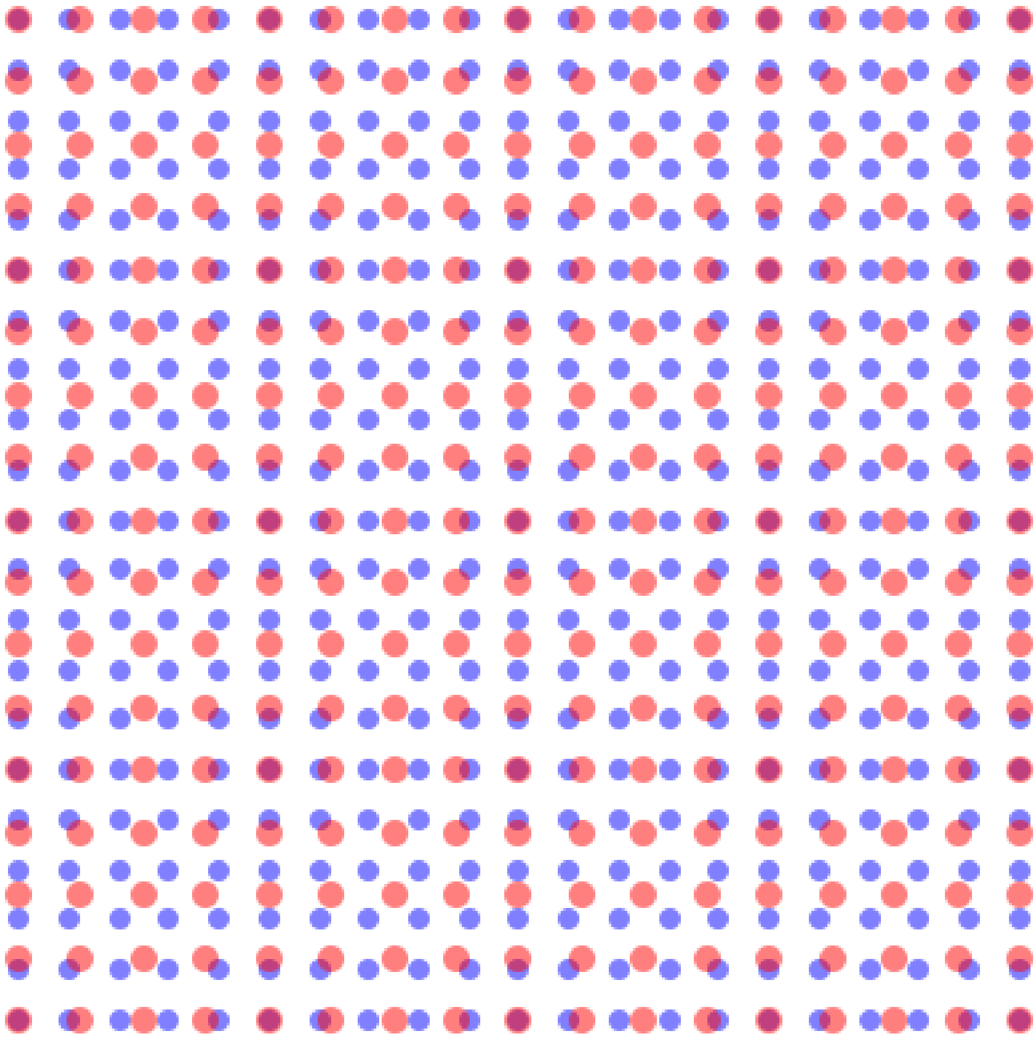
Eine kleine Drehung wird sichtbar.



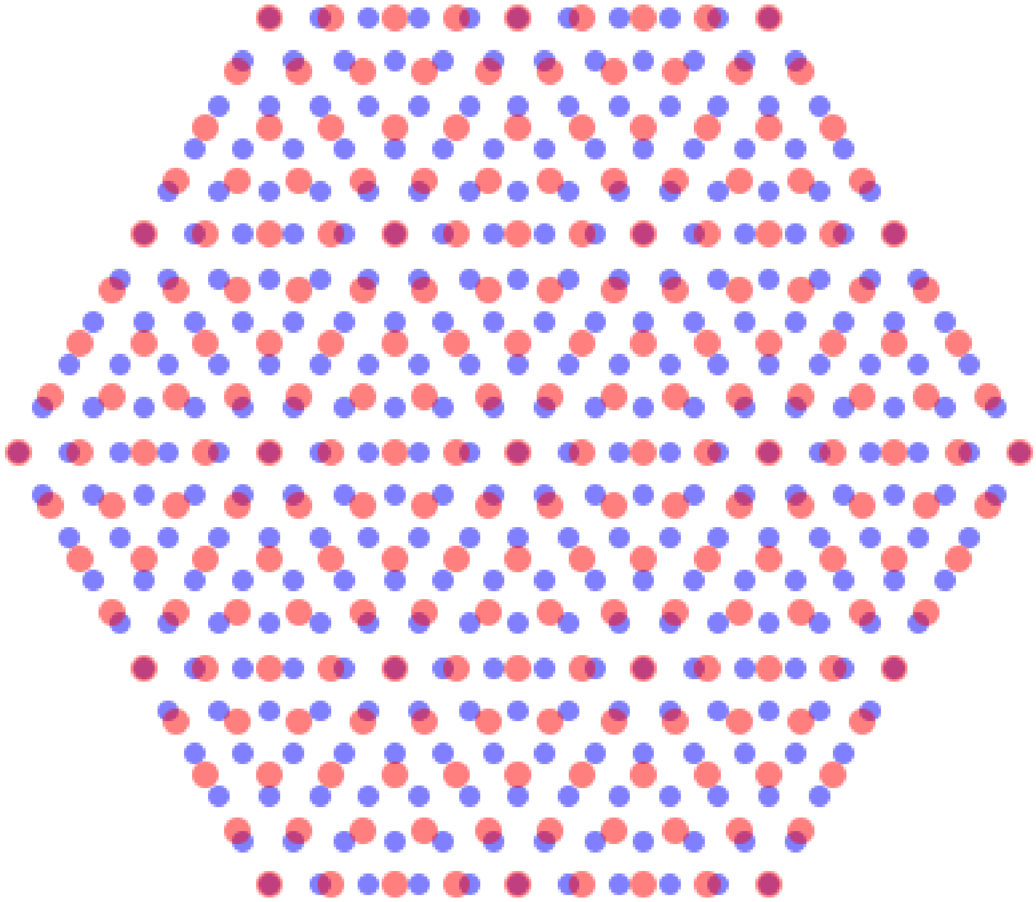
Kleine Drehung

5 Perspektive

Wir stellen uns Urbildraster und Bildraster in parallelen, senkrecht stehenden Ebenen vor. Wenn wir das aus einem gewissen Abstand ansehen, erkennen wir infolge der Perspektive ein neues Muster. In den folgenden Figuren befinden wir uns vier mal den Abstand der beiden Ebenen vor der vorderen Ebene. Die vorderen Punkte sind entsprechend größer gezeichnet. Die Punkte sind durchscheinend gezeichnet. Die Überlagerung von blau und rot ergibt magenta. Wir erkennen einen Quadratraster und einen Dreiecksraster aus überlagerten Punkten.



Perspektive

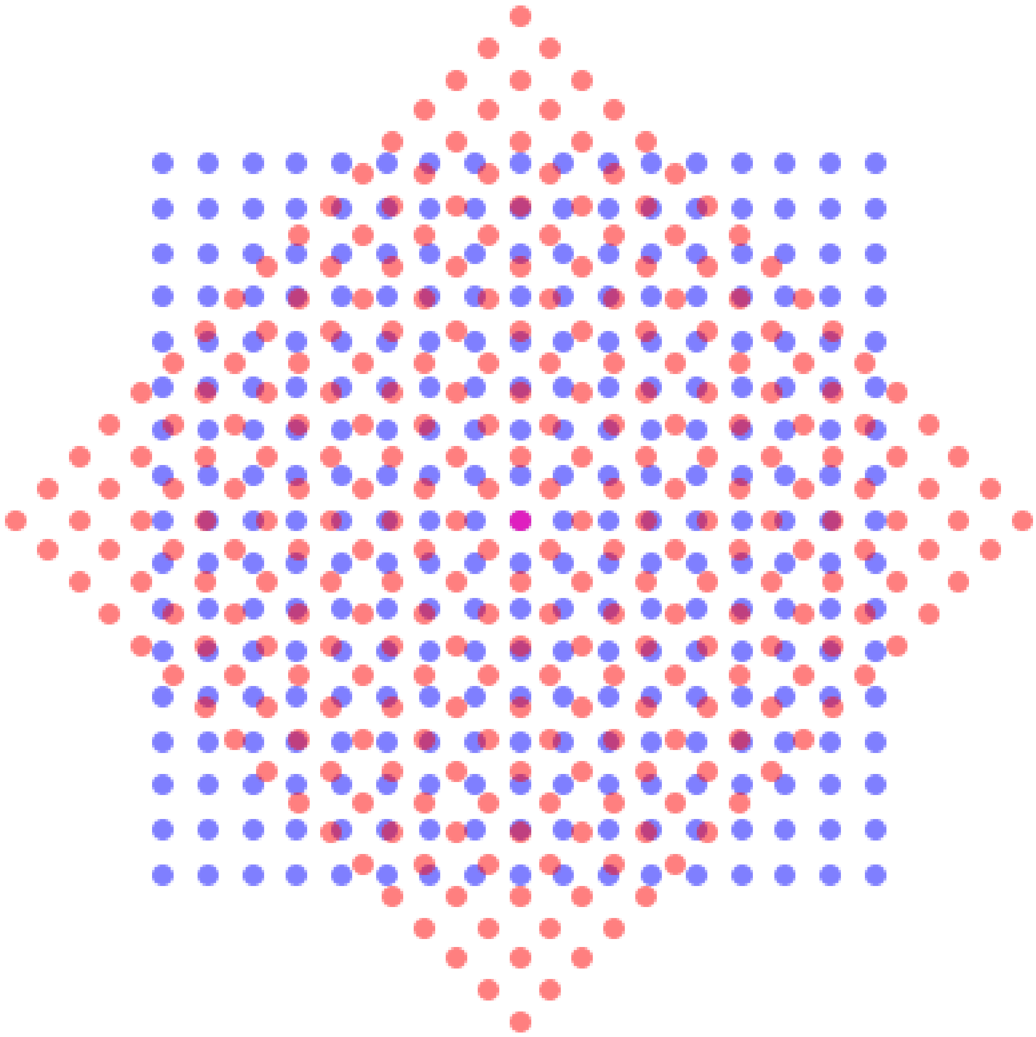


Perspektive

6 Drehung des Quadratrasters um 45°

6.1 Reine Drehung

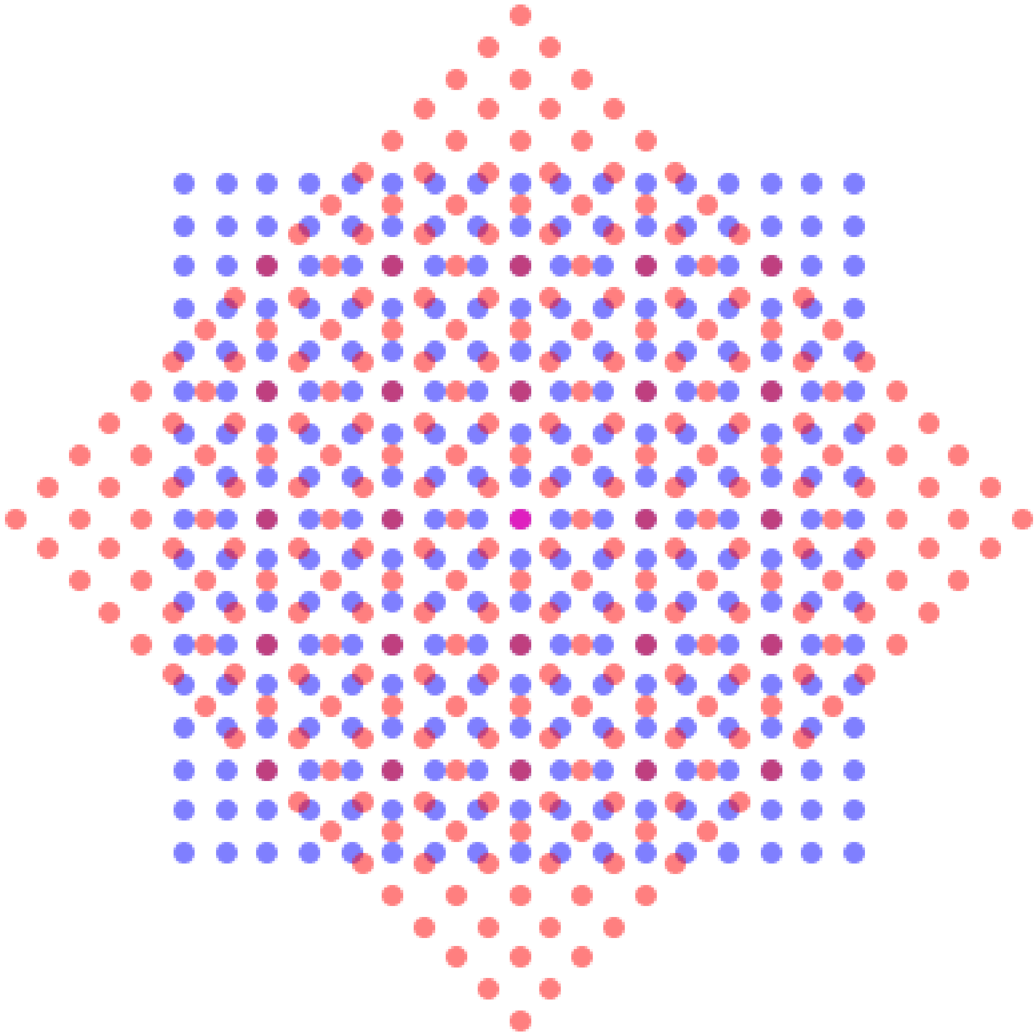
Bei einer Drehung um 45° ergibt sich außerhalb des Drehzentrums keine exakte Überlagerung von Punkten der beiden Raster, auch wenn es fast so aussieht. Das liegt daran, dass $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ eine irrationale Zahl ist. Eine irrationale Zahl ist dadurch charakterisiert, dass ihre Dezimalbruchentwicklung unendlich lang und aperiodisch ist. Endliche und periodische Dezimalbrüche gehören zu rationalen Zahlen.



Drehung um 45°

6.2 Kombiniert mit Streckung

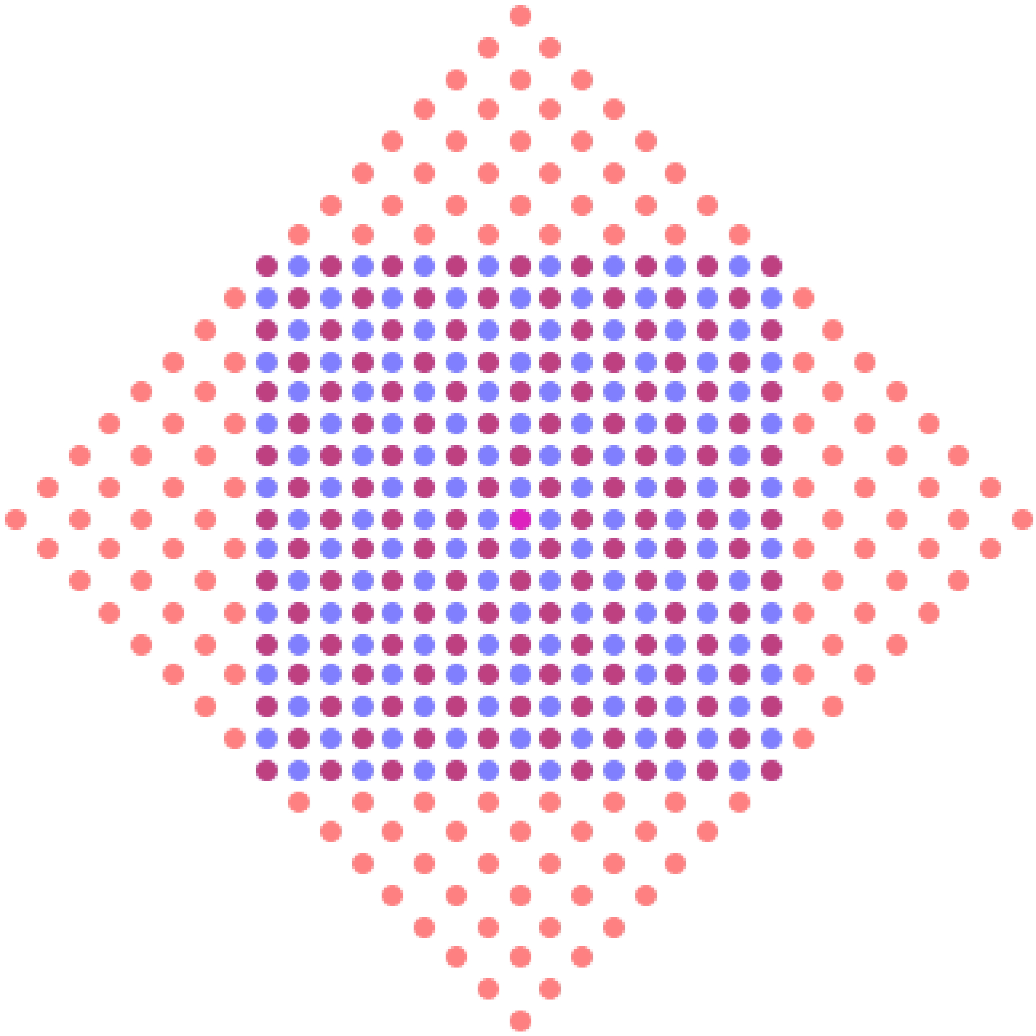
Weitere exakte Überlagerungen ergibt es, wenn wir noch eine Streckung einbauen mit einem Faktor, welcher $\sqrt{2}$ enthält. Im folgenden Beispiel ist der Streckfaktor $k = \frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1.06$. Wir sehen einen quadratischen Überlagerungsraster, welches bezogen auf den ursprünglichen blauen Raster die Maschenweite 3 hat. Bezogen auf den roten Raster ist die Diagonalenlänge der Maschen nun 4.



Drehung 45° mit kleiner Streckung. Streckfaktor $k = \frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1.06$

6.3 Einfachster Fall

Direkt mit dem Streckfaktor $k = \sqrt{2}$ ergibt sich:

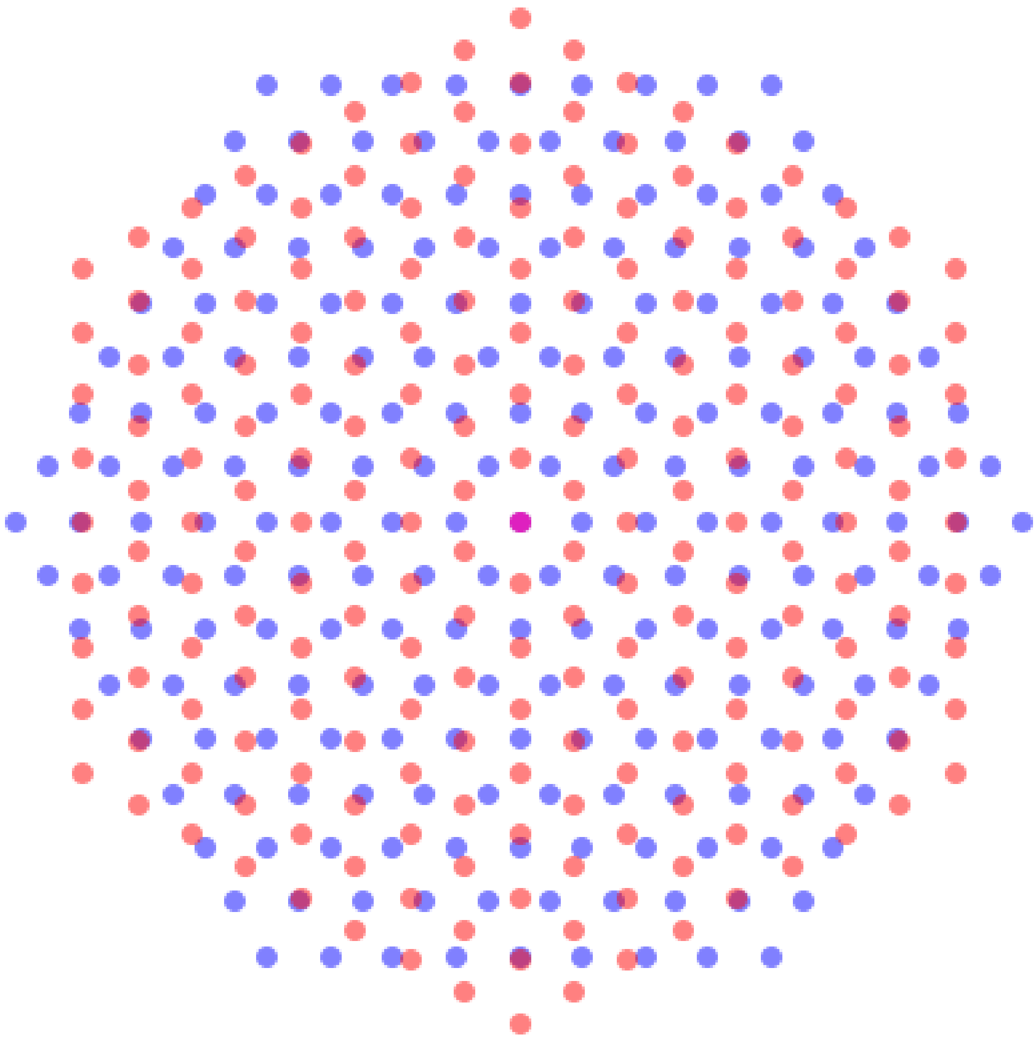


Drehung 45°, Streckfaktor $k = \sqrt{2}$

7 Drehung des Dreiecksrasters um 30°.

7.1 Reine Drehung

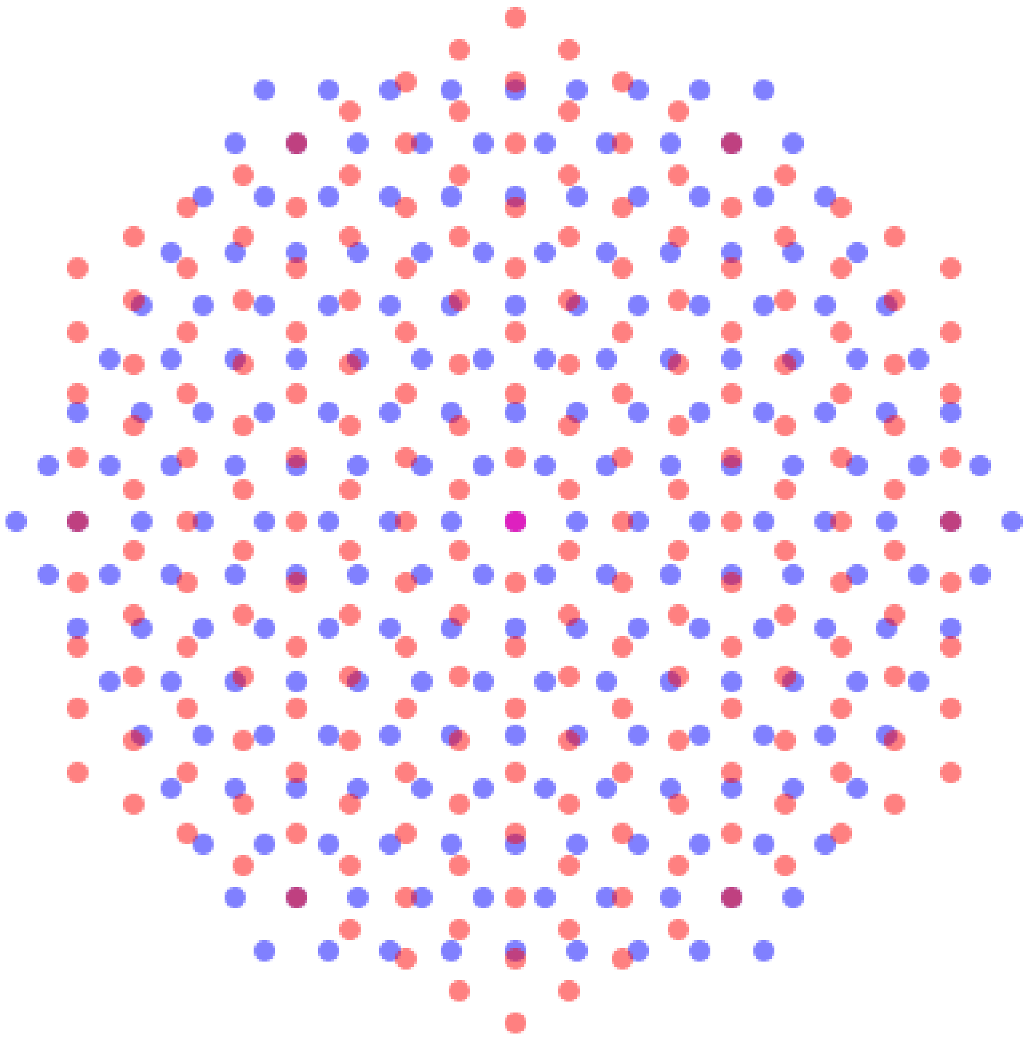
Den analogen Effekt erhalten wir, wenn wir den Dreiecksraster um einen Rasterpunkt um 30° drehen. Es gibt keine exakte Überlagerung.



Drehung um 30°

7.2 Kombiniert mit Streckung

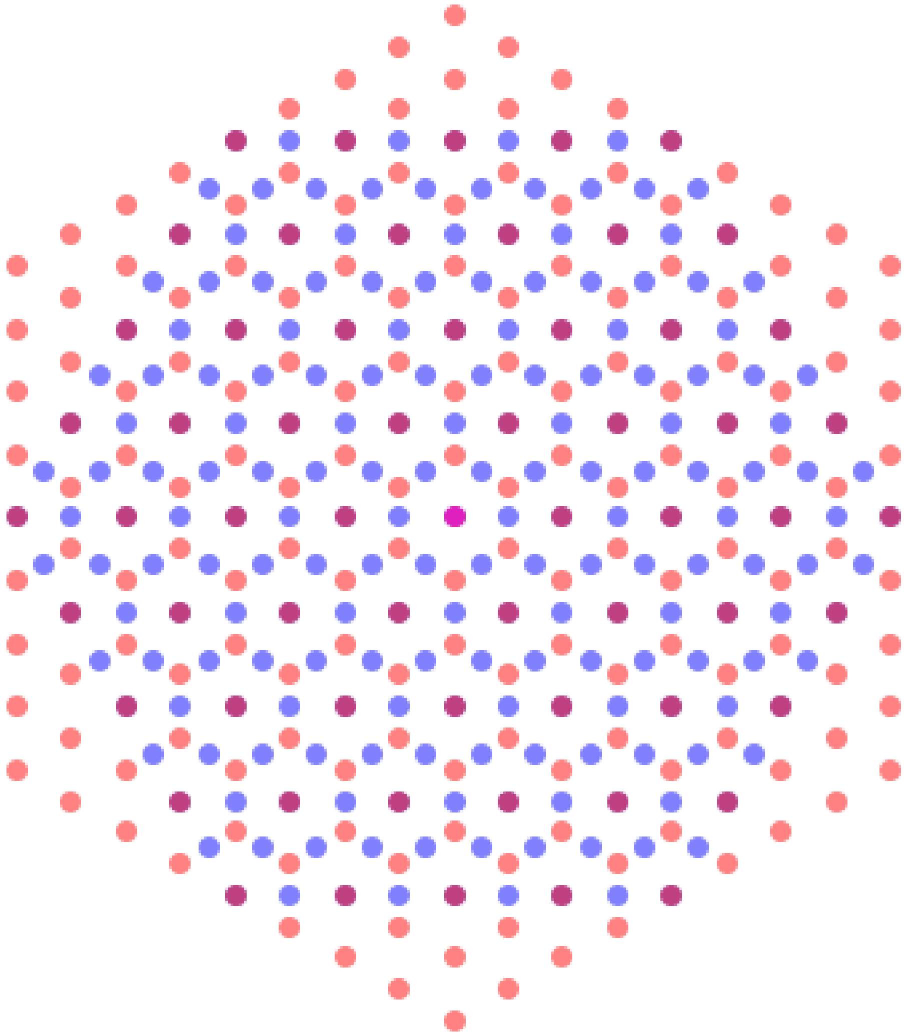
Bei einer Streckung um $k = \frac{7}{12}\sqrt{3} \approx 1.01$, also etwa um 1%, gibt es außerhalb des Zentrums exakte Überlagerungen — wo sind diese?



Drehung und kleine Streckung. Streckfaktor $k = \frac{7}{12}\sqrt{3} \approx 1.01$

7.3 Einfachster Fall

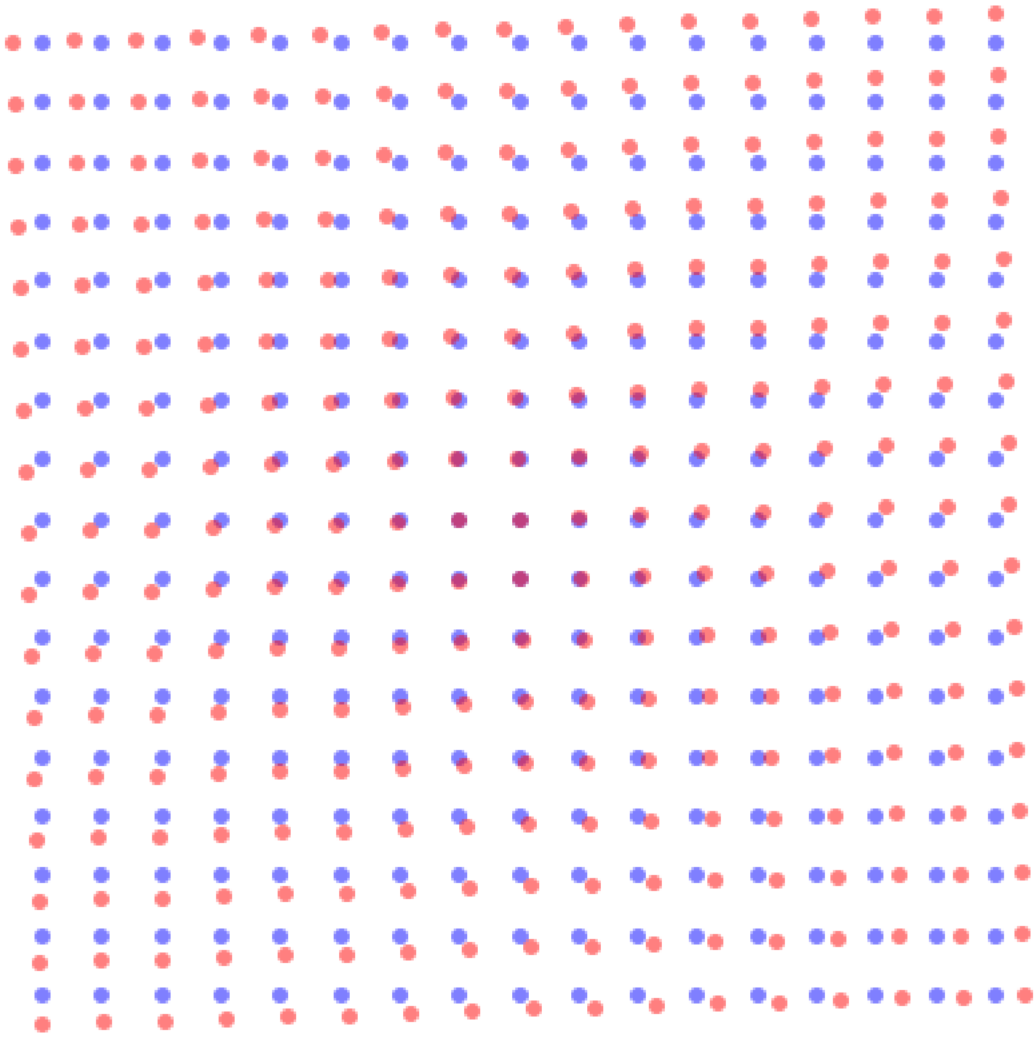
Es geht aber auch mit dem — allerdings größeren — Streckfaktor $k = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1.15$.



Streckfaktor $k = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1.15$

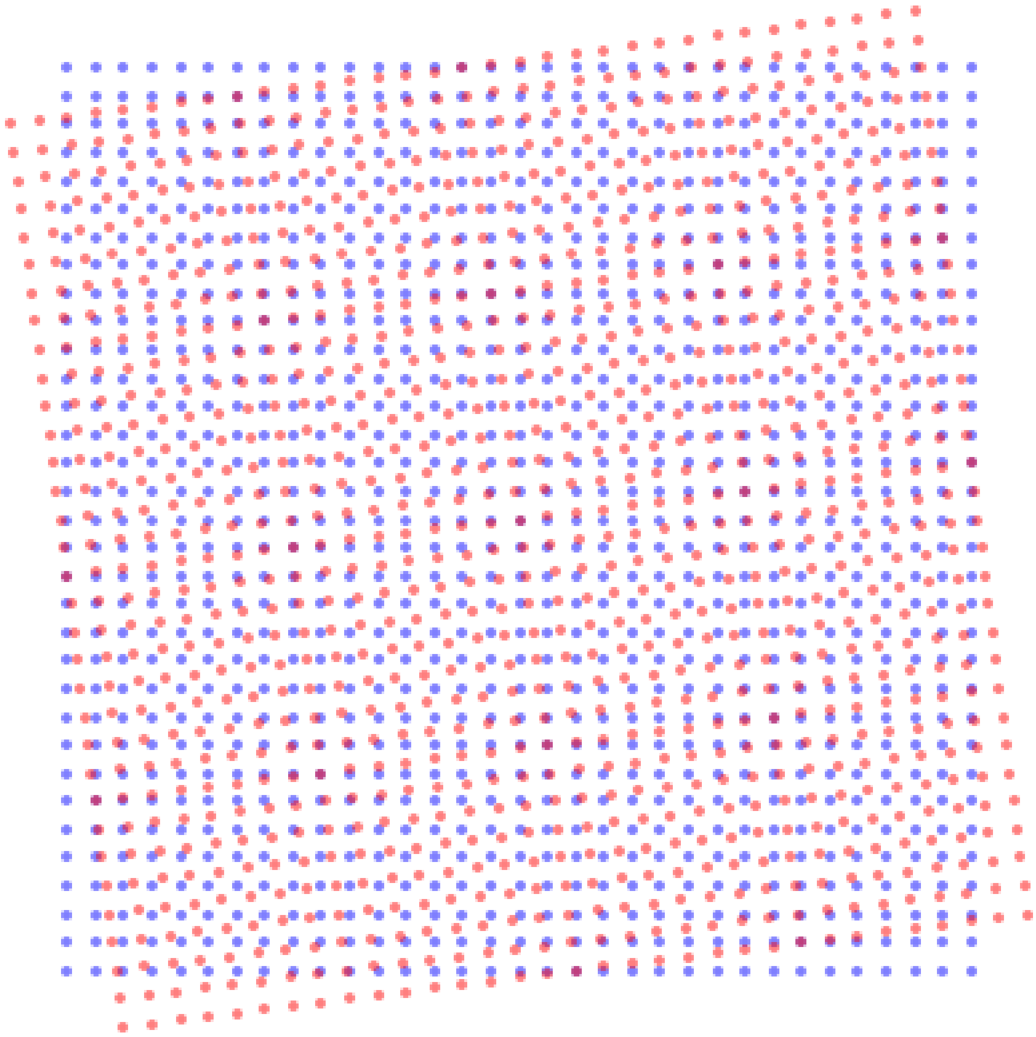
8 Kleine Drehstreckungen - Wirbel

Durch eine kleine Drehstreckung entsteht der Eindruck eines Wirbels. Im folgenden Beispiel ist der Drehwinkel $\phi = 0.03 \triangleq 1.72^\circ$ und der Streckfaktor $k = 1.03$.



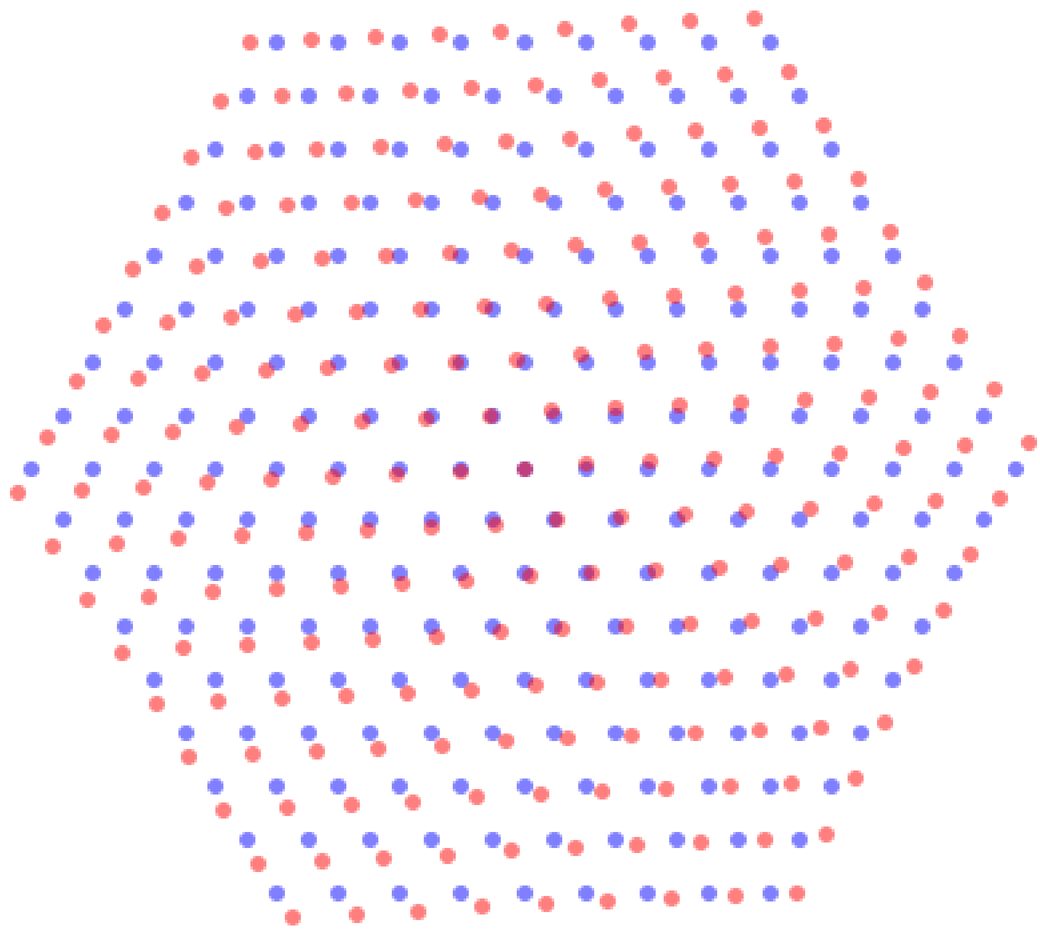
Wirbel

Durch geeignete Wahl der Drehstreckung ergeben sich rasterförmig angeordnete Wirbel. Im folgenden Beispiel ist der Drehwinkel $\phi = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \approx 7.13°$ und der Streckfaktor $k = \frac{1}{8}\sqrt{65} \approx 1.0078$



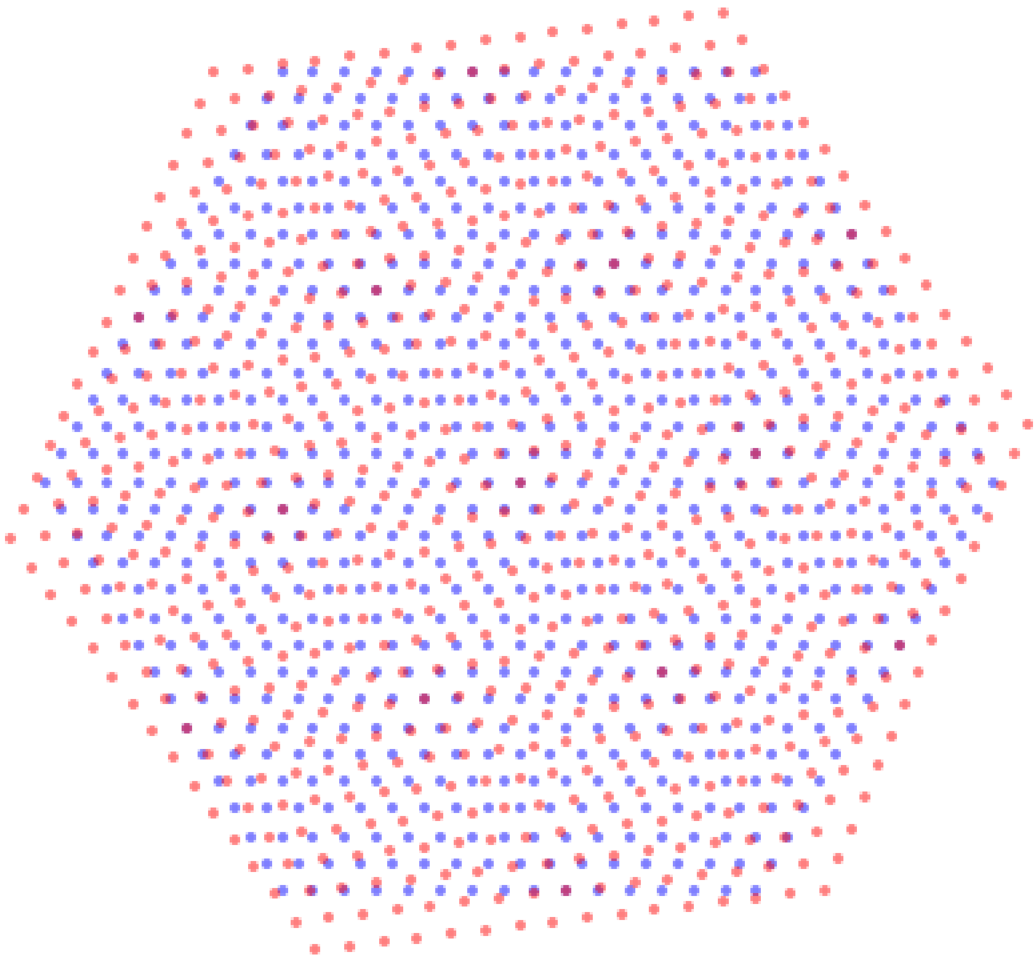
Mehrere Wirbelzentren

Im Dreiecksraster zunächst ein gewöhnlicher Wirbelsturm. Im folgenden Beispiel ist der Drehwinkel $\phi = 0.05 \triangleq 2.86°$ und der Streckfaktor $k = 1 + \frac{0.05\sqrt{3}}{3} \approx 1.029$.



Sturm im Wasserglas

Auch hier sind mehrere Zentren möglich. Im folgenden Beispiel ist der Drehwinkel $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right) \approx 6.59°$ und der Streckfaktor $k = \frac{1}{7}\sqrt{57} \approx 1.08$.

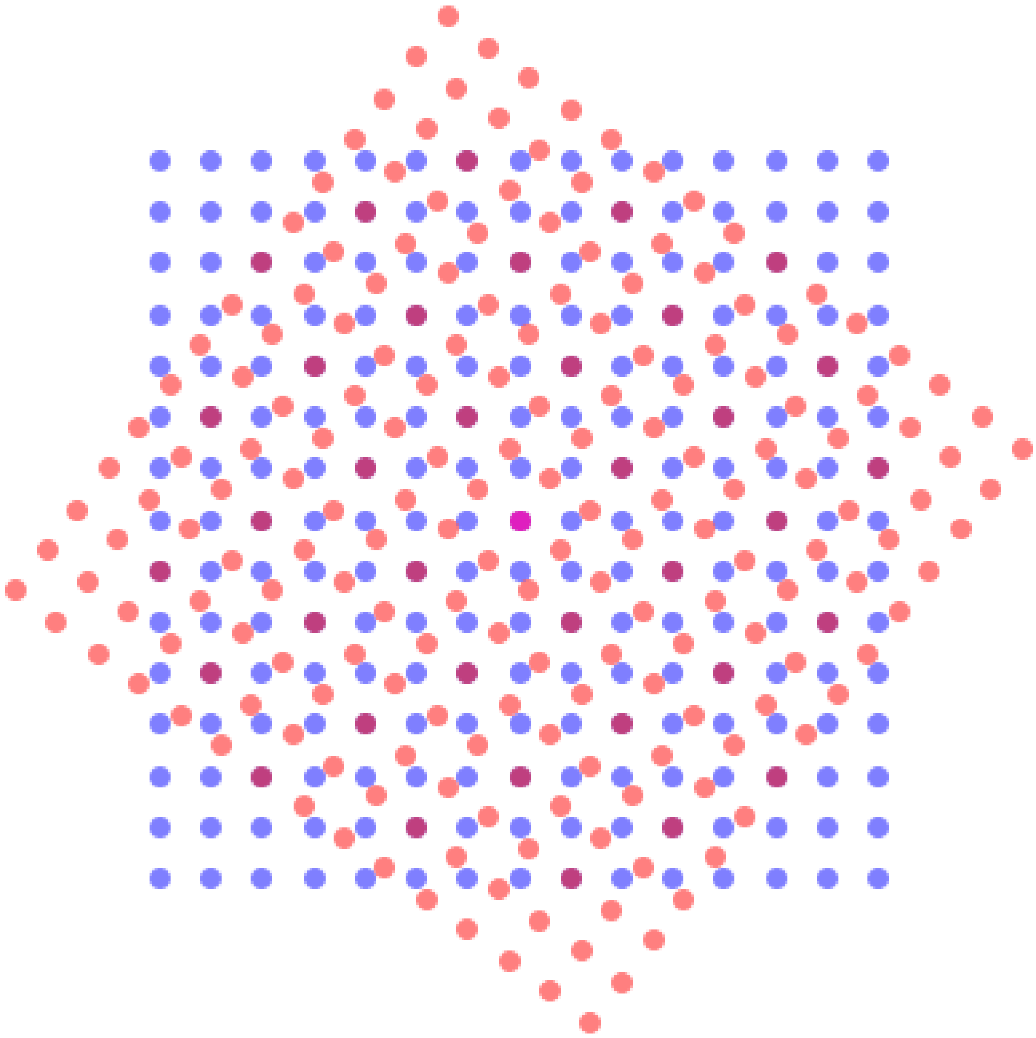


Mehrere Wirbelzentren

9 Pythagoreische Drehungen

9.1 Quadratraster

Können wir auch ohne Streckung, also mit einer reinen Drehung, exakte Überlagerungen erhalten? Im folgenden Bild ist der Drehwinkel $\phi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.13°$.

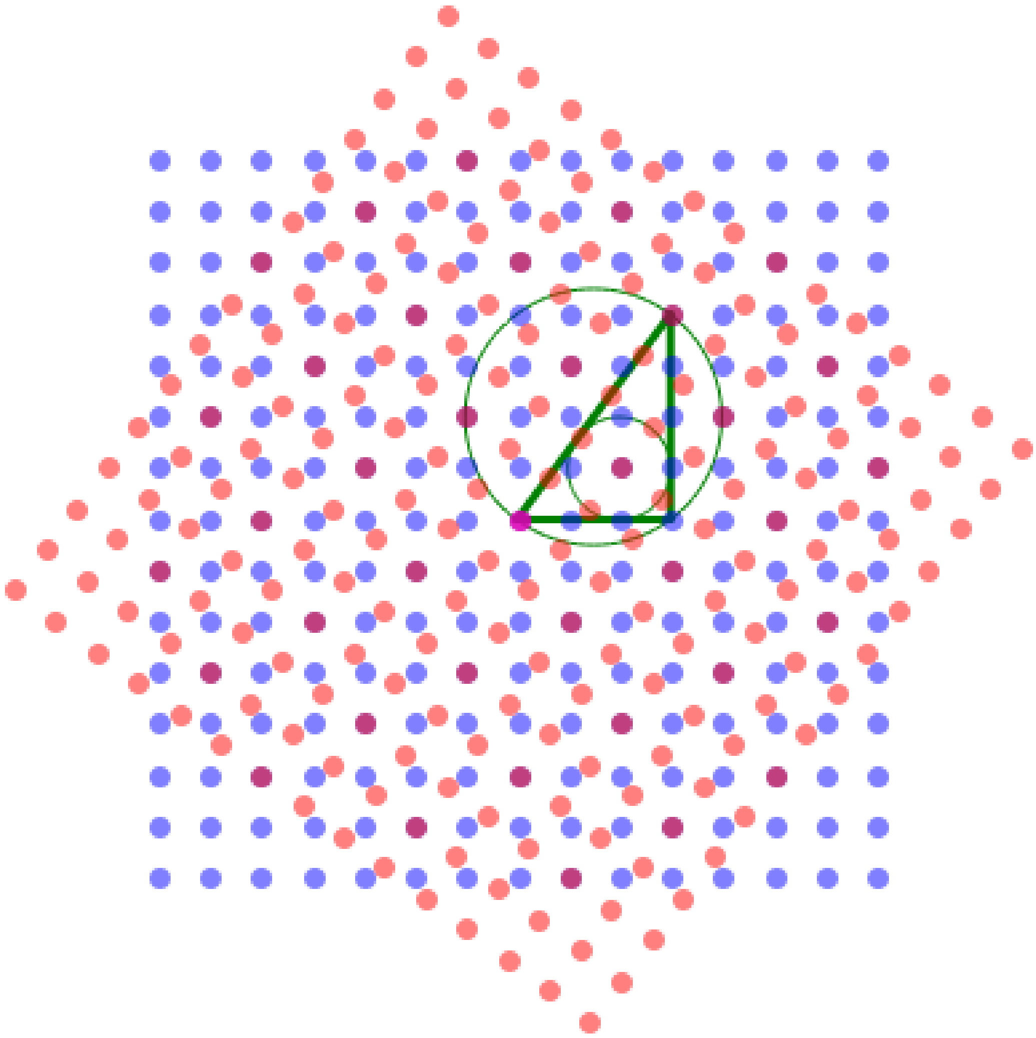


Drehwinkel $\phi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.13°$

Wir erkennen einen schräg liegenden quadratischen Überlagerungsraster mit Maschenweite $\sqrt{5} \approx 2.24$ und einer Steigung $\frac{1}{2}$ gegenüber der Horizontalen. Was steckt dahinter?

Wir alle kennen das rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 3$ und $b = 4$ sowie der Hypotenusenlänge $c = 5$. Der Witz ist, dass die Hypotenusenlänge c ebenfalls ganzzahlig ist, was bei beliebigen rechtwinkligen Dreiecken in der Regel nicht der Fall ist. Solche spezielle rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Kathetenlängen und ganzzahliger Hypotenusenlänge heißen *pythagoreische Dreiecke*.

Unser Drehwinkel ϕ ist aber der Winkel β dieses Dreieckes mit den Kathetenlängen $a = 3$ und $b = 4$ sowie der Hypotenusenlänge $c = 5$. In der Tat können wir ein solches Dreieck in unseren Raster einpassen.

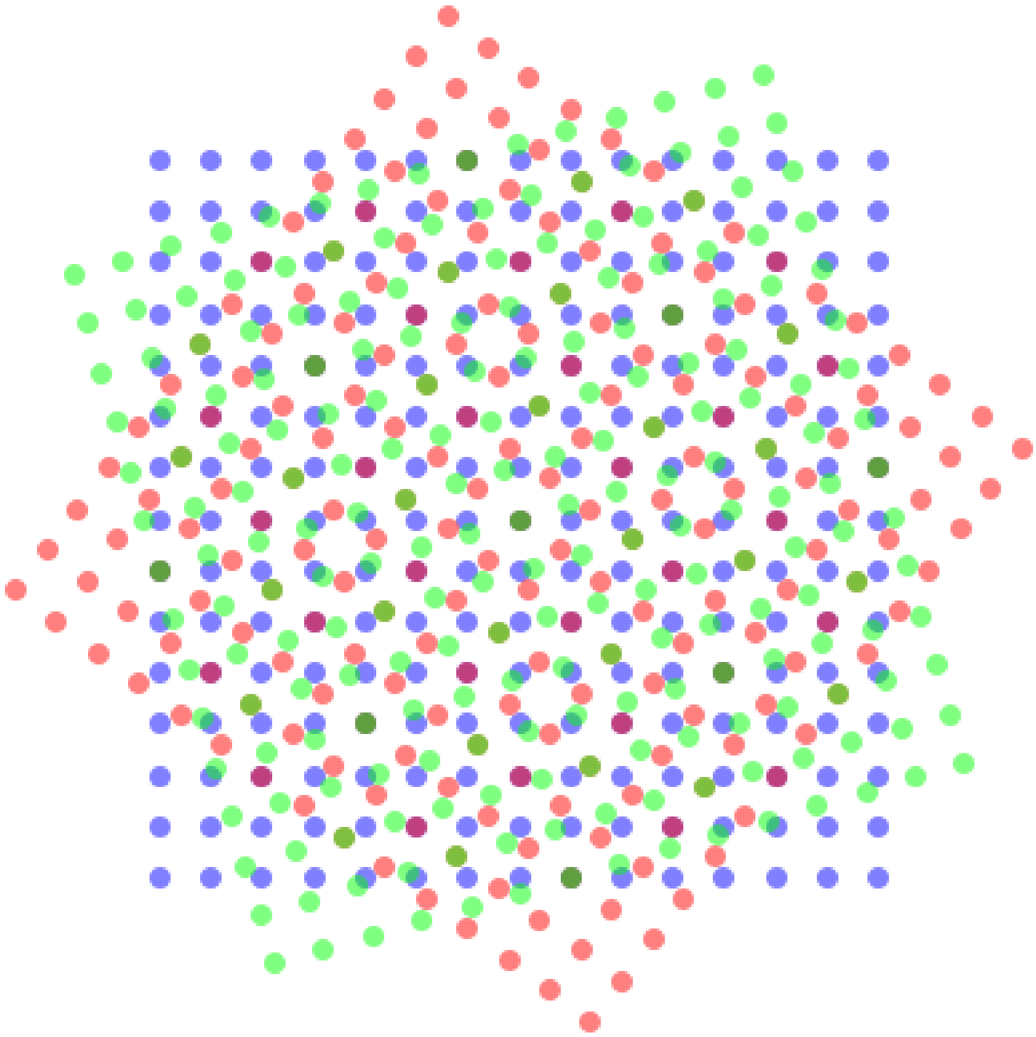


Pythagoreisches Dreieck 3:4:5

Die Kathete *a* ist horizontal und misst 3 Einheiten im blauen Raster, die Kathete *b* ist vertikal und misst 4 Einheiten ebenfalls im blauen Raster, während die schräge Hypotenuse 5 Einheiten im roten Raster misst. Da wir aber nur gedreht und nicht gestreckt haben, sind die Maschenweiten in beiden Rastern gleich.

Wir sehen, dass auch In- und Umkreis des Dreieckes durch mehrere Rasterpunkte verlaufen.

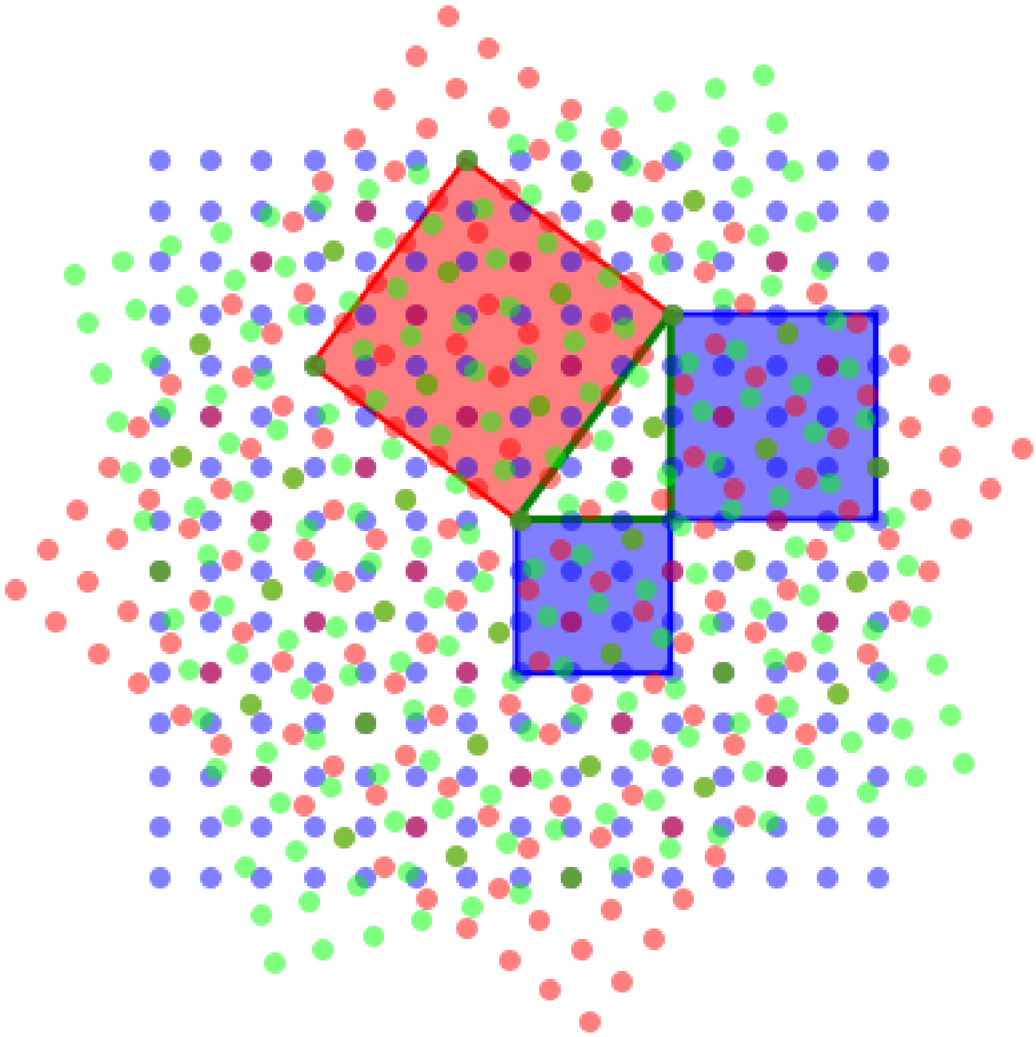
Wir können auch noch einen dritten Raster ins Spiel bringen, indem wir den roten Raster um $\phi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.13°$ drehen. Das Bild davon ist in der folgenden Figur grün gezeichnet.



Drei Raster

Die exakten Überlagerungen aller drei Raster bilden einen schräg liegenden Quadratraster der Maschenweite 5 (dies ist im roten Raster nachprüfbar). Dieser neue Raster hat die Steigung $\frac{4}{3}$.

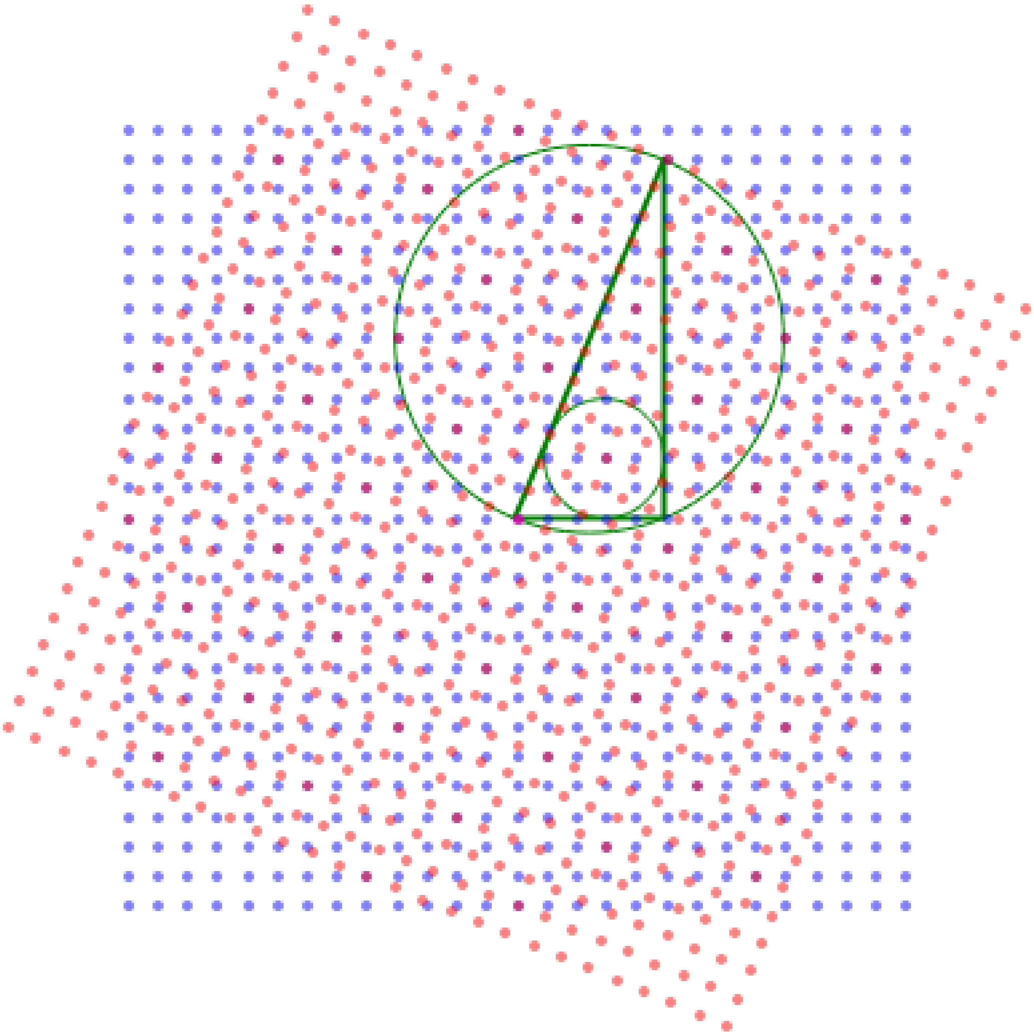
Somit ist das Hypotenusenquadrat des rechtwinkligen Dreieckes ein Rasterquadrat dieses neuen Rasters. Selbstverständlich passt es auch in den roten Raster, da wir ein pythagoreisches Dreieck haben. Die beiden Kathetenquadrate passen in den ursprünglichen blauen Raster.



Hypotenusenquadrat

Erinnerung: Nach dem Satz des Pythagoras ist die Summe der beiden blauen Quadratflächen gleich der roten Quadratfläche.

Im nächst größeren pythagoreischen Dreieck ist $a = 5$, $b = 12$ und $c = 13$. Wir arbeiten den Drehwinkel $\phi = \beta = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67.38°$.



Pythagoreisches Dreieck 5:12:13

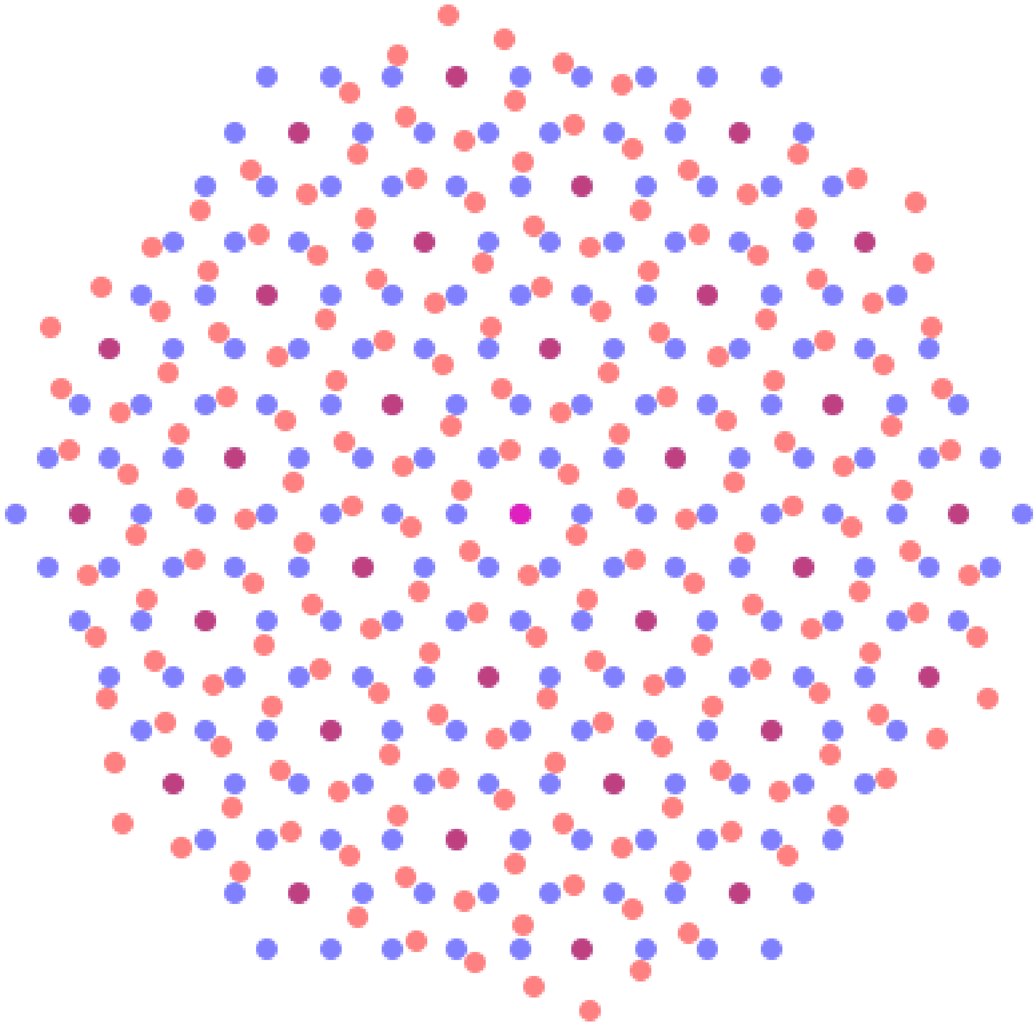
Der schräg liegende quadratische Überlagerungsraster hat die Machenweite $\sqrt{13}$ und die Steigung $\frac{2}{3}$ (vgl. [Walser 1995], [Walser 1999], [Walser 2000]).

9.2 Dreiecksraster

Das Analogon zu den pythagoreischen Dreiecken im Dreiecksraster sind Dreiecke mit ganzzahligen Seiten a, b, c und einem Winkel $\gamma = 120°$. Aus dem Kosinussatz gilt dann die Beziehung:

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

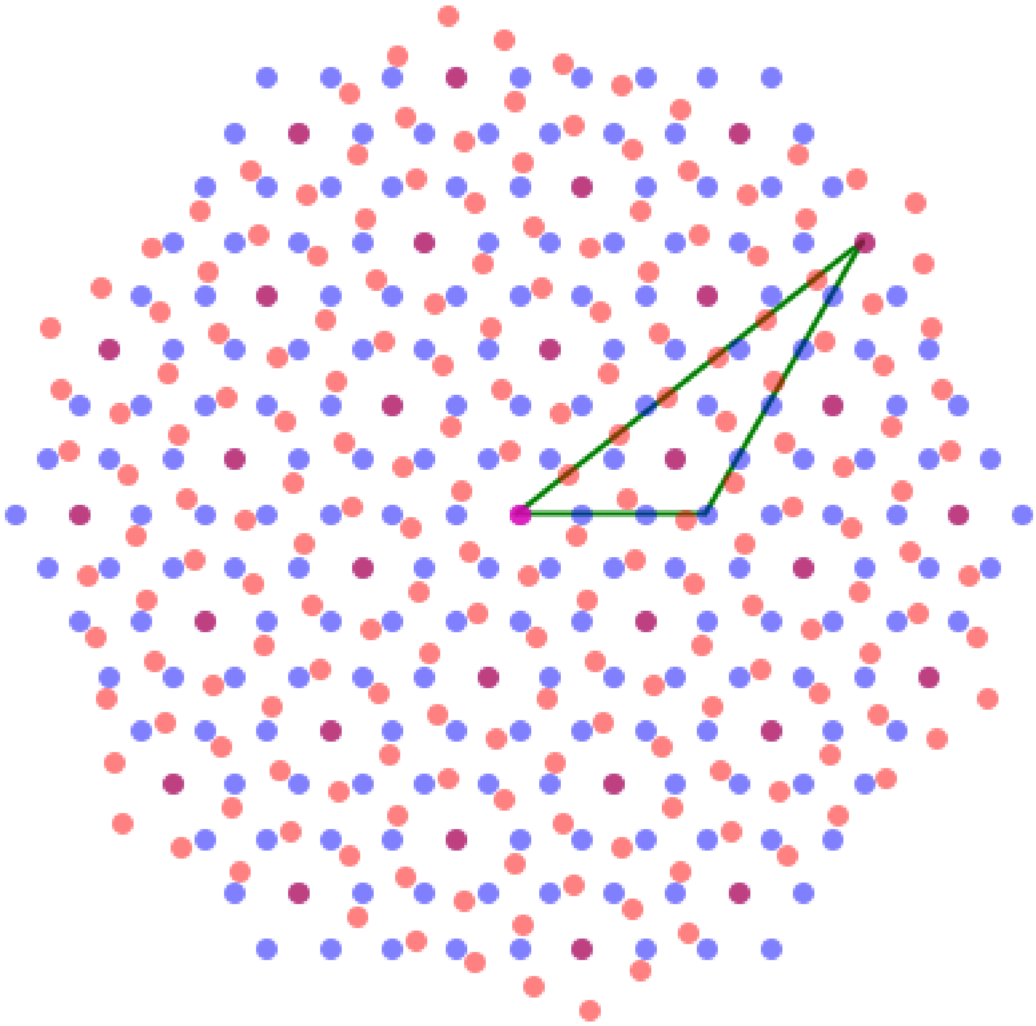
Das einfachste Beispiel dazu ist das Dreieck mit den Seiten $a = 3$, $b = 5$ und $c = 7$. Dieses hat den Winkel $\beta = \arctan\left(\frac{5}{11}\sqrt{3}\right) \approx 38.21°$. Im folgenden Bild die beiden Raster bei einer Drehung um $\phi = \arctan\left(\frac{5}{11}\sqrt{3}\right) \approx 38.21°$.



Drehung um $\phi = \arctan\left(\frac{5}{11}\sqrt{3}\right) \approx 38.21°$

Wir sehen einen schräg liegenden Dreiecksraster mit der Maschenweite $\sqrt{7}$.

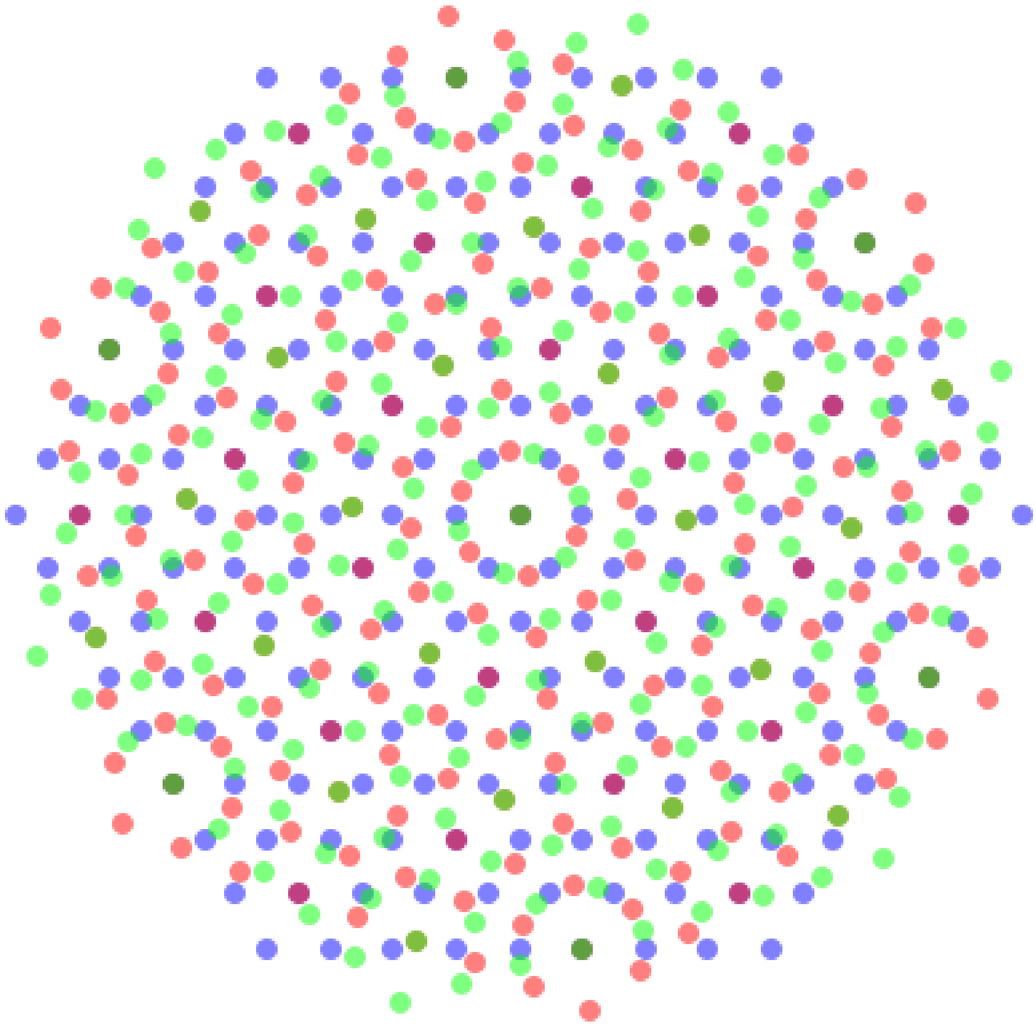
Im folgenden Bild ist auch das zugehörige „pythagoreische“ Dreieck eingezeichnet.



„Pythagoreisches“ Dreieck

Die Seiten *a* und *b* messen 3 beziehungsweise 5 Einheiten im blauen Raster, die Seite *c* misst 7 Einheiten im gedrehten roten Raster.

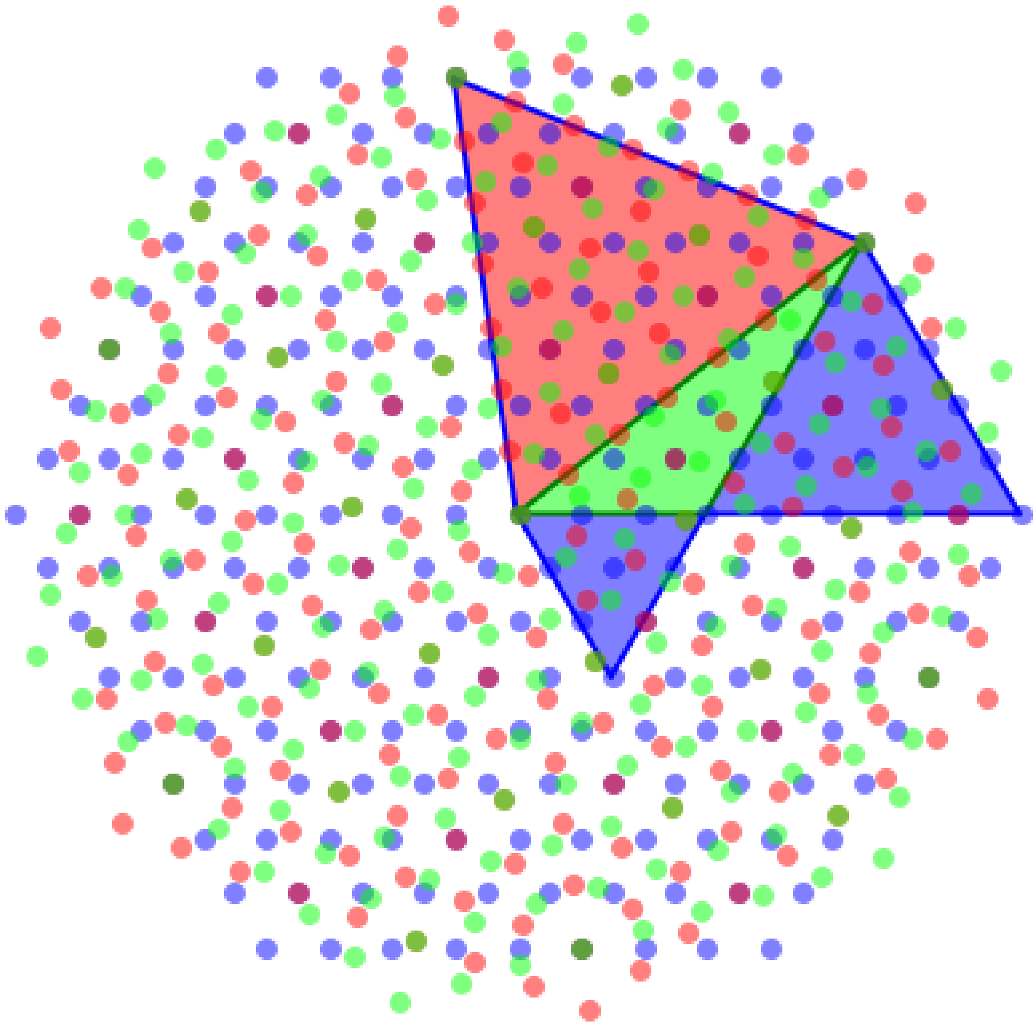
Wenn wir nochmals drehen und einen dritten Raster zeichnen (grün), ergibt sich folgendes Bild.



Drei Raster

Wir erkennen deutlich einen Dreiecksraster, das aus der exakten Überlagerung der drei Raster besteht.

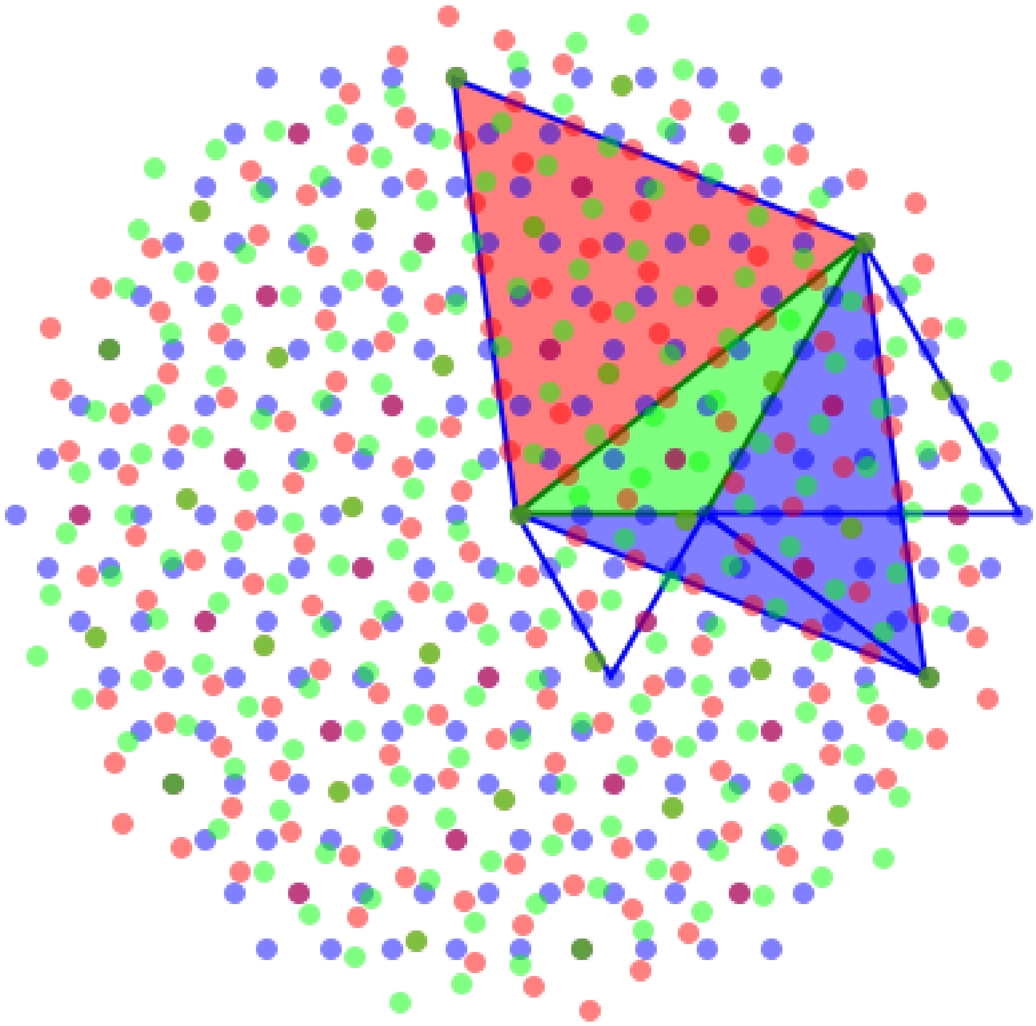
Das gibt Anlass zur folgenden Figur. Wir setzen jeder Seite des ursprünglichen Dreieckes ein gleichseitiges Dreieck auf.



Aufgesetzte gleichseitige Dreiecke

Das erinnert irgendwie an die Figur des Pythagoras. Tatsächlich gilt auch hier eine Flächenbeziehung: Die Summe der beiden blauen Dreiecksflächen plus die Fläche des ursprünglichen (grünen) Dreieckes ist gleich der roten Dreiecksfläche.

Dies kann mit dem Kosinussatz bewiesen werden oder einfacher, indem wir die beiden blauen Dreiecke flächengleich umformen.



Beweisfigur

Literatur

[Walser 1995] Walser, Hans: Pythagoreische Dreiecke in der Gittergeometrie. Didaktik der Mathematik (23), 1995, Seiten 193 - 205.

[Walser 1999] Walser, Hans: Pythagoreische Dreiecke und Gittergeometrie. Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern. Für die GDM herausgegeben von Michael Neubrand. Hildesheim: Franzbecker, 1999. ISBN 3-88120-304-4. S. 575-577

[Walser 2000] Walser, Hans: Lattice Geometry and Pythagorean Triangles. ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Jahrgang 32, April 2000, Heft 2, S. 32 - 35