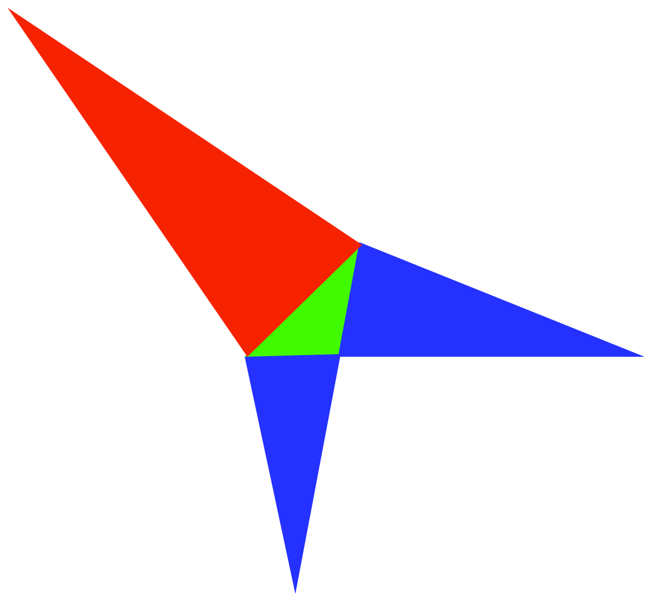
Hans Walser



blau + blau + grün = rot

Eine Visualisierung des Kosinussatzes

SLA-Herbsttagung 2008

St. Gallen

Inhalt

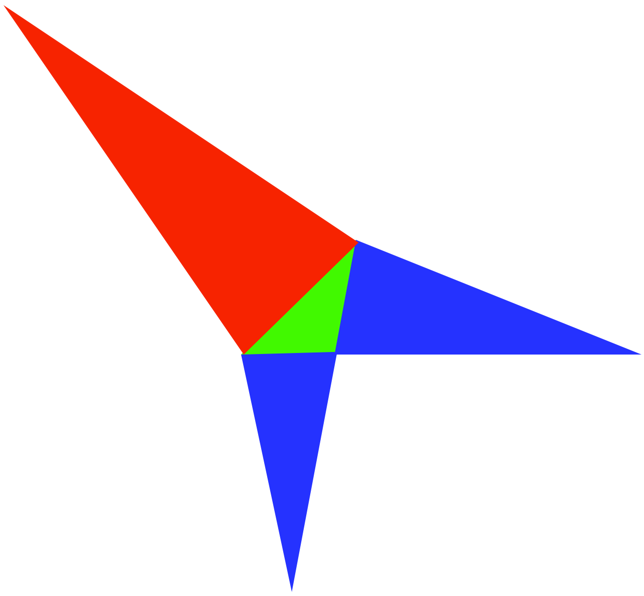
last modified: 9. Juli 2008

1 Worum es geht

Es wird eine zum Pythagoras-Piktogramm analoge Figur für nicht rechtwinklige Dreiecke besprochen. Dabei werden ähnliche gleichschenklige Dreiecke mit Basiswinkel γ oder $180° - \gamma$ aufgesetzt.

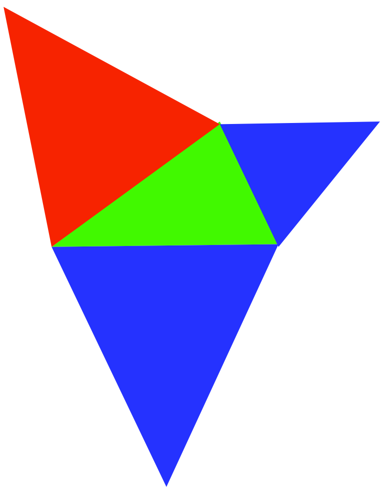
2 Bildsprache

Der relevante Winkel γ im grünen Dreieck ist stumpf; die gleichschenkligen Dreiecke haben den Basiswinkel $180° - \gamma$:



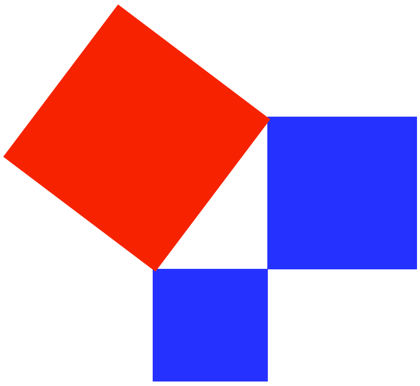
blau + blau + grün = rot

Der relevante Winkel γ im grünen Dreieck ist spitz; dies ist auch der Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke:



blau + blau = grün + rot

Dies erinnert an das Piktogramm für den Satz des Pythagoras, in welchem allerdings der Flächeninhalt des Dreieckes keine Rolle spielt:

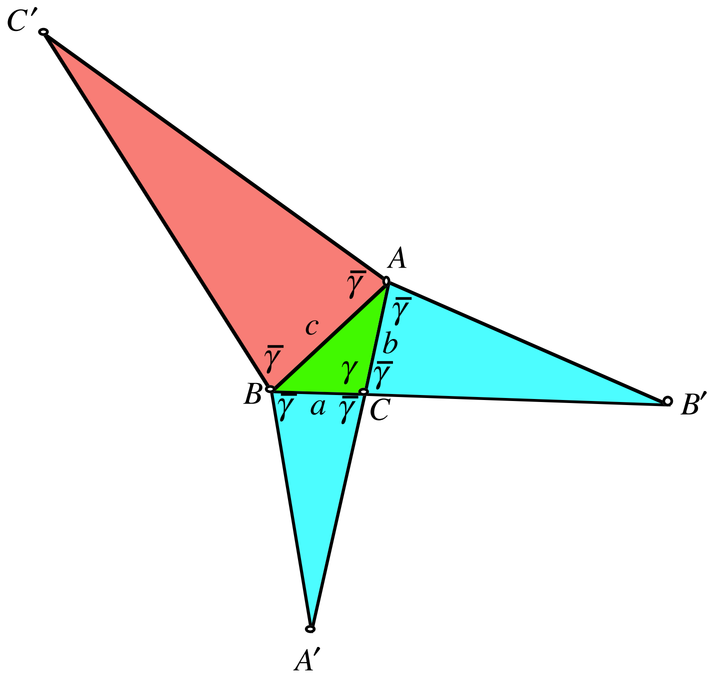


blau + blau = rot

3 Beweis

Wir beweisen den Fall mit einem stumpfen Winkel γ. Für den Fall eines spitzen Winkels γ gelten analoge Überlegungen.

Wir arbeiten mit dem Außenwinkel $\overline{\gamma} = 180° - \gamma$ und setzen dem Dreieck ABC gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel $\overline{\gamma}$ auf.



Wir arbeiten mit dem Außenwinkel

In dieser Situation gilt der Flächensatz:

> Die beiden blauen Dreiecke plus das grüne Dreieck sind zusammen flächenmäßig gleich groß wie das rote Dreieck.

3.1 Rechnerischer Beweis

Es ist:

$$A_{\Delta A'CB} = \tfrac{a^2}{4}\tan(\overline{\gamma}) \qquad A_{\Delta B'AC} = \tfrac{b^2}{4}\tan(\overline{\gamma}) \qquad A_{\Delta C'BA} = \tfrac{c^2}{4}\tan(\overline{\gamma})$$

$$A_{\Delta ABC} = \tfrac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \tfrac{1}{2}ab\sin(\overline{\gamma}) = \tfrac{2ab}{4}\tan(\overline{\gamma})\cos(\overline{\gamma})$$

Zu prüfen ist:

$$A_{\Delta A'CB} + A_{\Delta B'AC} + A_{\Delta ABC} \overset{?}{=} A_{\Delta C'BA}$$

$$\tfrac{a^2}{4}\tan(\overline{\gamma}) + \tfrac{b^2}{4}\tan(\overline{\gamma}) + \tfrac{2ab}{4}\tan(\overline{\gamma})\cos(\overline{\gamma}) \overset{?}{=} \tfrac{c^2}{4}\tan(\overline{\gamma})$$

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos(\overline{\gamma}) \overset{?}{=} c^2$$

Die letzte Zeile ist wegen $\cos(\overline{\gamma}) = -\cos(\gamma)$ der Kosinus-Satz.

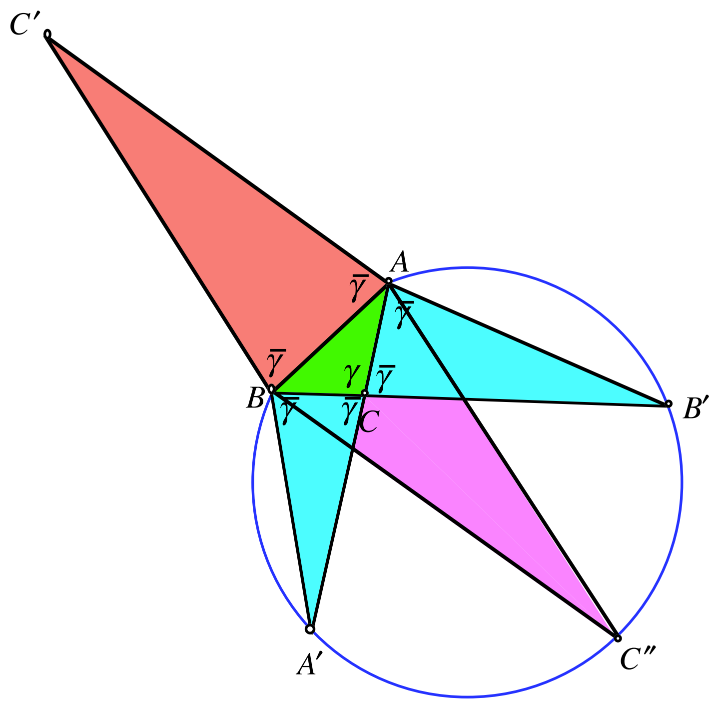
3.2 Geometrischer Beweis

Beweisidee: Wolfgang Kroll, Marburg

Wir spiegeln das Dreieck ABC' an AB, das Bilddreieck sei ABC''. Dann gilt:

$$\sphericalangle AA'B = \sphericalangle AC''B = \sphericalangle AB'B$$

Die Punkte A', C'', B' liegen also auf demselben Ortsbogen über AB.

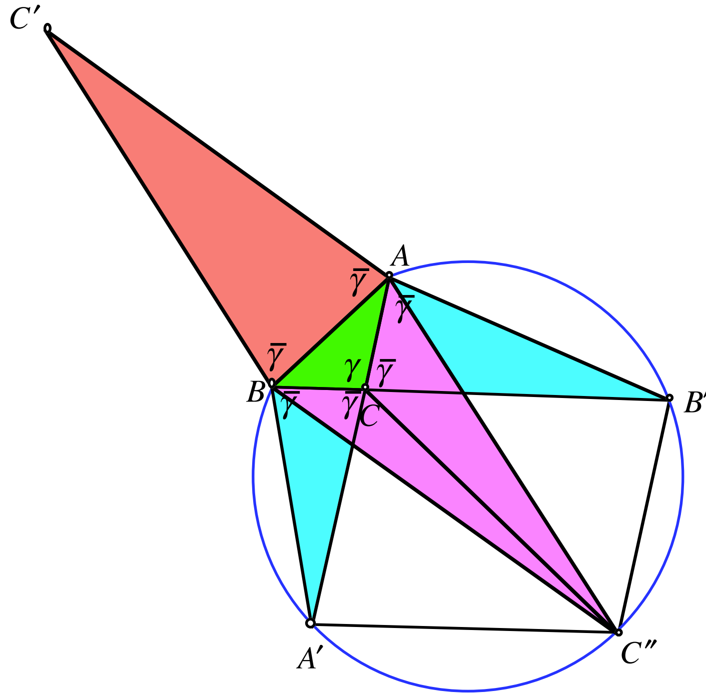


Spiegelung und Ortsbogen

Weiter gelten folgende Winkelbeziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B'BA = \beta \\ \sphericalangle C''BA = \overline{\gamma} \\ \sphericalangle A'BB' = \overline{\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle A'BC'' = \beta$$

Wegen $\sphericalangle B'BA = \beta$ und $\sphericalangle A'BC'' = \beta$ ist $\overline{B'A} = \overline{A'C''}$ (gleiche Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen). Da das Dreieck ACB' gleichschenklig ist, folgt sogar $\overline{CB'} = \overline{A'C''}$. Analog kann $\overline{CA'} = \overline{B'C''}$ gezeigt werden; das Viereck $B'CA'C''$ ist also ein Parallelogramm.



Parallelogramm

Daher ist:

$$A_{\Delta CBA'} = A_{\Delta CBC''} \quad \text{und} \quad A_{\Delta ACB'} = A_{\Delta ACC''}$$

Also gilt:

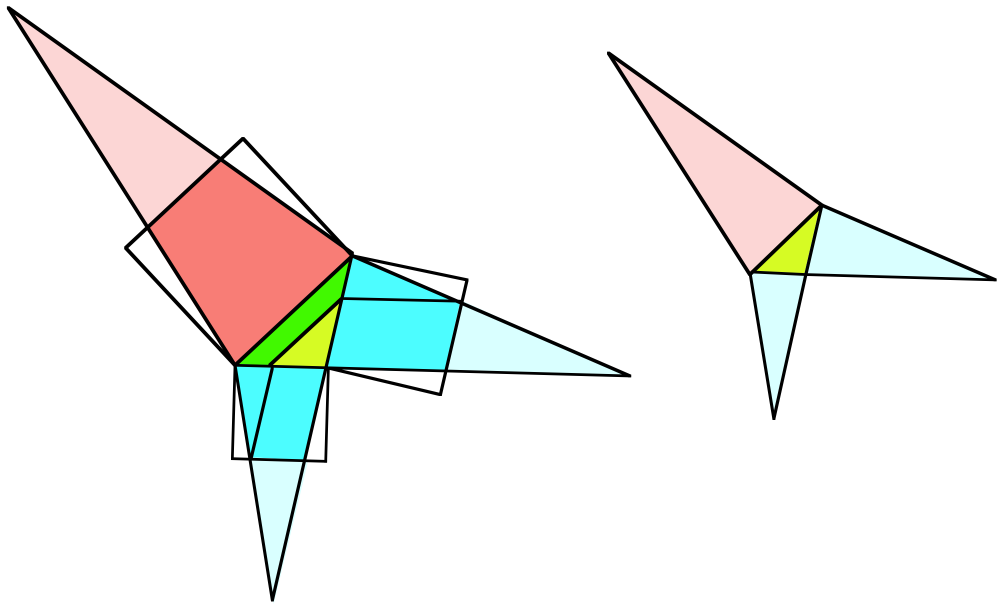
$$A_{\Delta ABC'} = A_{\Delta ABC''} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CBA'} + A_{\Delta ACB'}$$

Damit ist der Flächensatz bewiesen.

4 Link zu Pythagoras

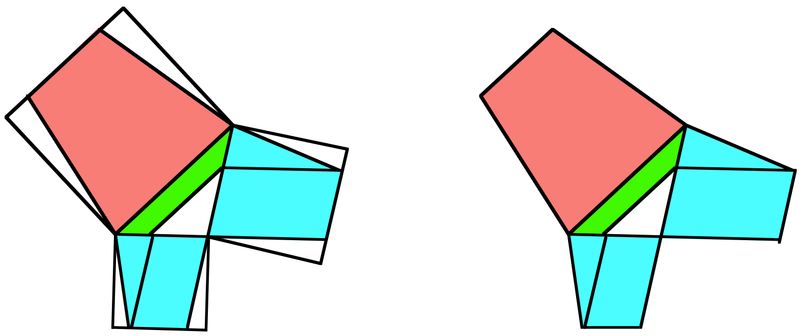
Der Kosinus-Satz enthält für $\gamma = 90°$ als Sonderfall den Satz des Pythagoras. Leider können wir in unserem Flächensatz den Winkel γ *nicht* als rechten Winkel wählen, da die gleichschenkligen Dreiecke sonst zu Halbstreifen mit unendlich großem Flächeninhalt ausarten würden. Zudem wäre die Frage, auf welcher Seite die Dreiecksfläche nun zu rechnen wäre, da $\gamma = 90°$ als Grenzfall sowohl eines stumpfen wie eines spitzen Winkels zu sehen wäre. Allerdings könnte man argumentieren, dass eine endliche Dreiecksfläche im Vergleich zu den unendlichen Halbstreifen ohnehin quantité négligeable ist. Aber statt über das Unendliche zu philosophieren, bleiben wir bei den Leuten und stutzen die gleichschenkligen Dreiecke. Wir schneiden sie bei relativ gleicher Höhe ab, so dass gleichschenklige Trapeze der respektiven Höhen μa, μb, μc mit frei wählbarem μ übrig bleiben. Als Referenz an das übliche Pythagoras-Piktogramm wählen wir $\mu = 1$.

Die Frage ist, wie wir das zentrale Dreieck stutzen müssen, damit der Flächensatz wieder gilt. Dies sehen wir, wenn wir die abgeschnittenen Teile der gleichschenkligen Dreiecke neu zusammensetzen. Es entsteht dann ein kleines zentrales Dreieck, das zum ursprünglichen Dreieck ähnlich ist und von diesem abgeschnitten werden muss. Übrig bleibt ein (im allgemeinen nicht gleichschenkliges) Trapez.



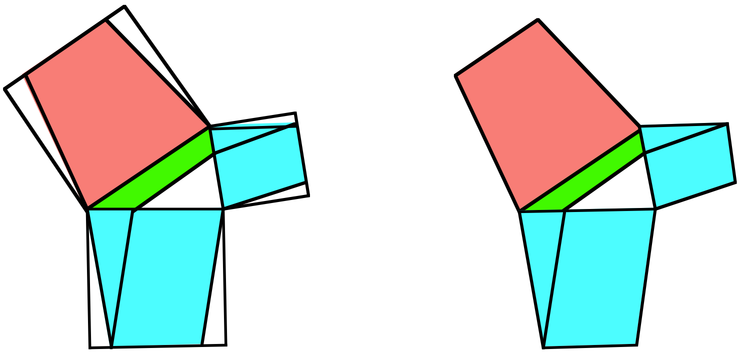
Trapeze als gestutzte Dreiecke. Rest neu zusammengesetzt

Wir erhalten so einen Flächensatz mit Trapezen:



blau + blau + grün = rot

Für einen spitzen Winkel γ gilt ein analoger Flächensatz:

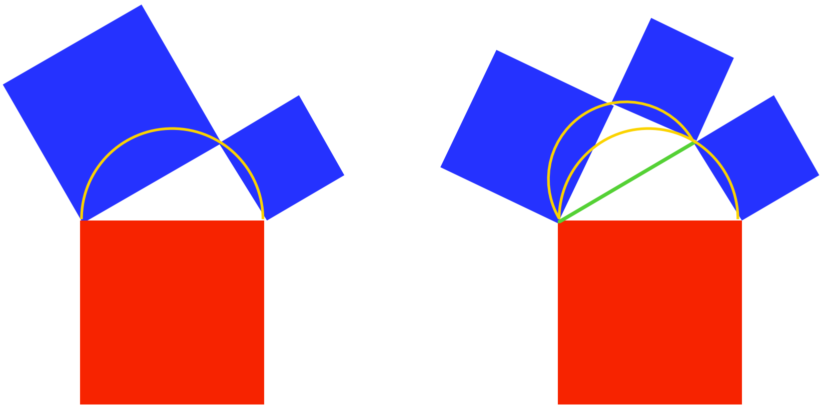


blau + blau = grün + rot

In beiden Fällen werden für $\gamma \to 90°$ die blauen und das rote Trapez zu Quadraten und das grüne Trapez verschwindet. Es entsteht das Pythagoras-Piktogramm.

5 Iterationen. Spiralen

Das Pythagoras-Piktogramm kann iteriert werden, indem wir der einen Kathete ein zweites rechtwinkliges Dreieck aufsetzen.



Iteration

Das zweite rechtwinklige Dreieck kann beliebig geformt sein. Es gibt jedoch zwei Sonderfälle, die bei der Weiterführung der Iteration je zu Spiralen führen.

Der eine Sonderfall besteht darin, dass wir das zweite rechtwinklige Dreieck ähnlich (formgleich) zu ersten zeichnen. In der üblichen Beschriftung des rechtwinkligen Dreieckes heißt das, das der Winkel α konstant bleiben soll. Bei der weiteren Iteration führt das zu einer logarithmischen Spirale.

Im zweiten Sonderfall soll die Kathete a konstant bleiben. Was entsteht in diesem Fall?

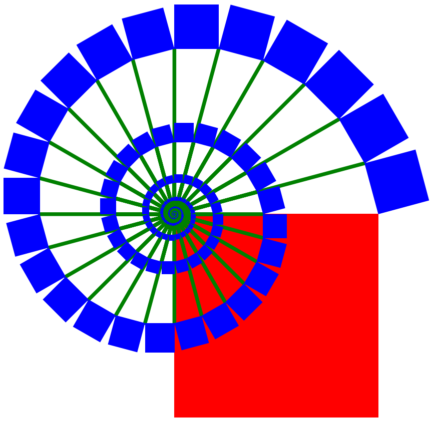
Wir wollen nun diese beiden Fälle auch auf unsere neuen Figuren übertragen.

5.1 Formgleiche Dreiecke

Es entstehen logarithmische Spiralen.

5.1.1 Rechtwinklige Dreiecke

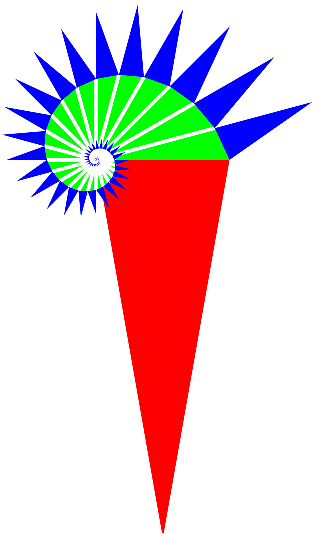
Im folgenden Beispiel ist $\alpha = 15°$.



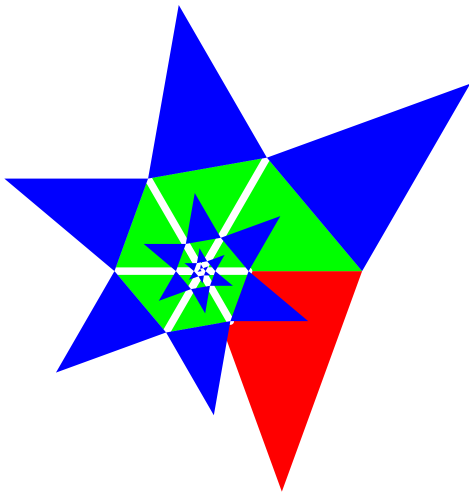
blau + ··· = rot

5.1.2 Stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke

Im Beispiel links ist $\gamma = 100°, \alpha = 15°$, im Beispiel rechts $\gamma = 70°, \alpha = 60°$.



blau + ··· + grün + ··· = rot

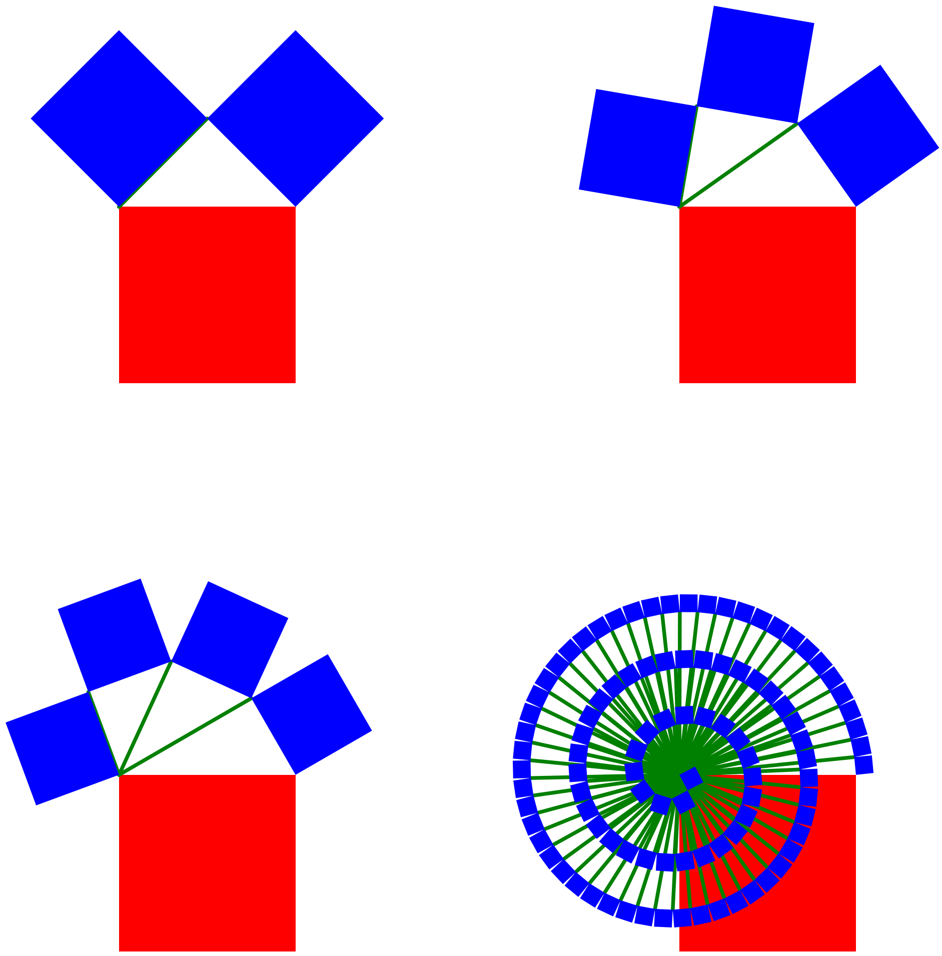


blau + ··· = grün + ··· + rot

5.2 Konstante Seite

5.2.1 Rechtwinklige Dreiecke

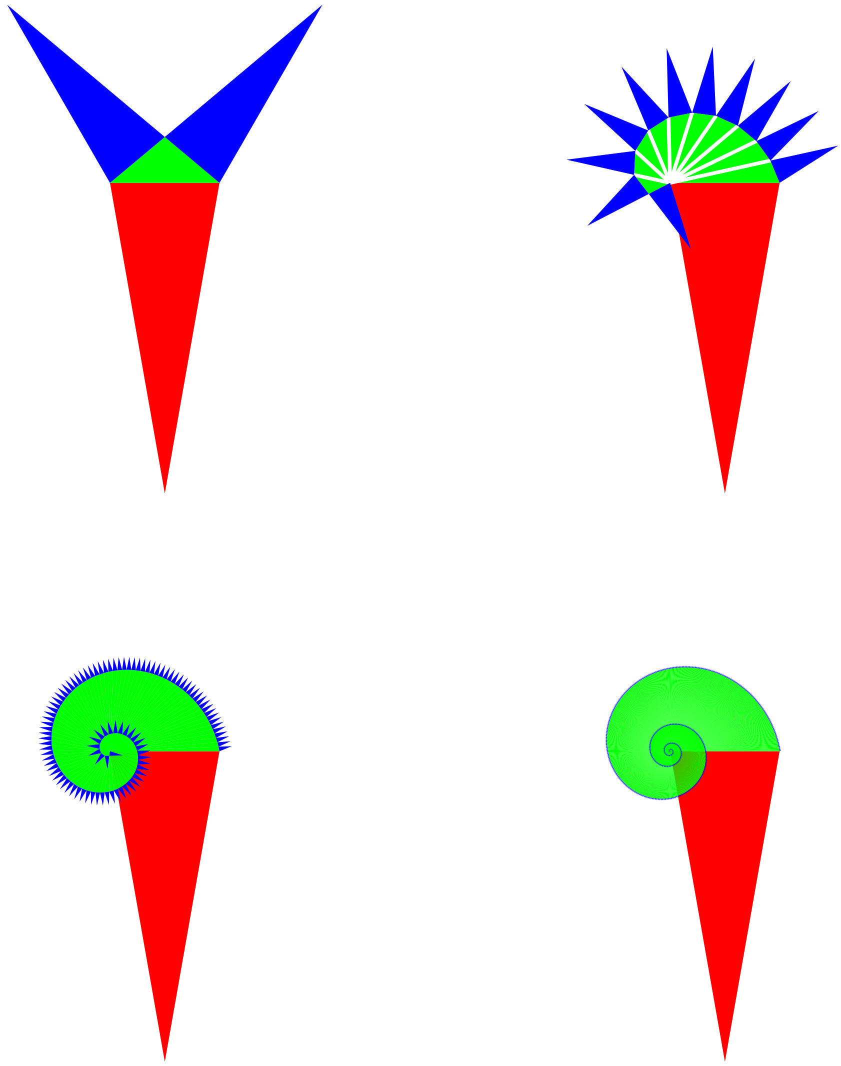
Wir wählen die Kathete a konstant. Dabei muss sie so gewählt werden, dass es mit den Quadratflächen aufgeht. Die Figur enthält nur endlich viele Dreiecke. Die Figur zeigt der Reihe nach 1, 2, 3 und 100 Dreiecke. Es entsteht eine *archimedische* Spirale. Für den Beweis siehe [Walser 2004].



Archimedische Spirale

5.2.2 Stumpfwinklige Dreiecke

In der folgenden Figurenfolge ist jeweils $\gamma = 100°$. Es sind der Reihe nach 1, 10, 100, 1000 grüne Dreiecke gezeichnet.

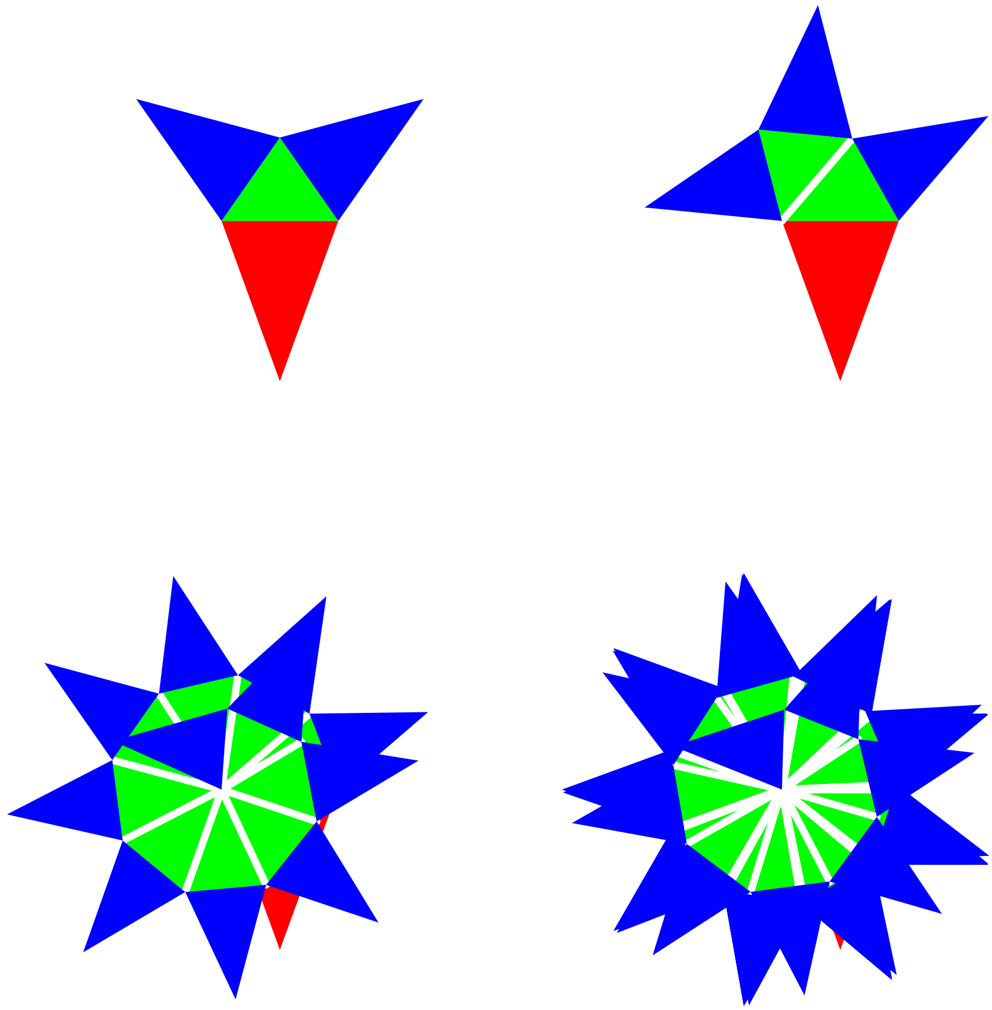


Logarithmische Spirale

Wider Erwarten entsteht eine *logarithmische Spirale*. Beweis siehe
http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/D/Dreiecksketten/Dreiecksketten.htm

5.2.3 Spitzwinklige Dreiecke

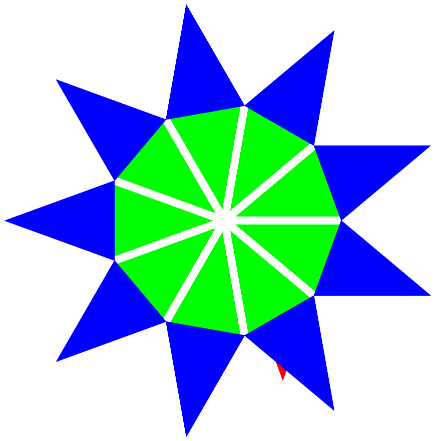
In der folgenden Figurenfolge ist zunächst $\gamma = 70°$. Es sind der Reihe nach 1, 2, 10, 100 grüne Dreiecke gezeichnet.



Durcheinander

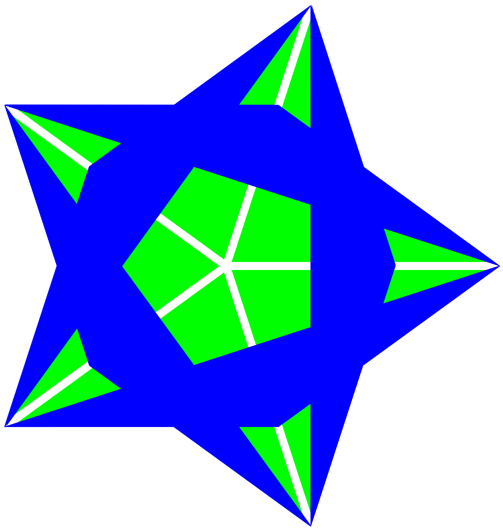
Wir erkennen nichts als ein Durcheinander von Überlappungen.

Wenn wir jedoch die ersten 20 Fälle weglassen, also nur die grünen und blauen Dreiecke von Nr. 21 bis 100, zeichnen, sieht es so aus:



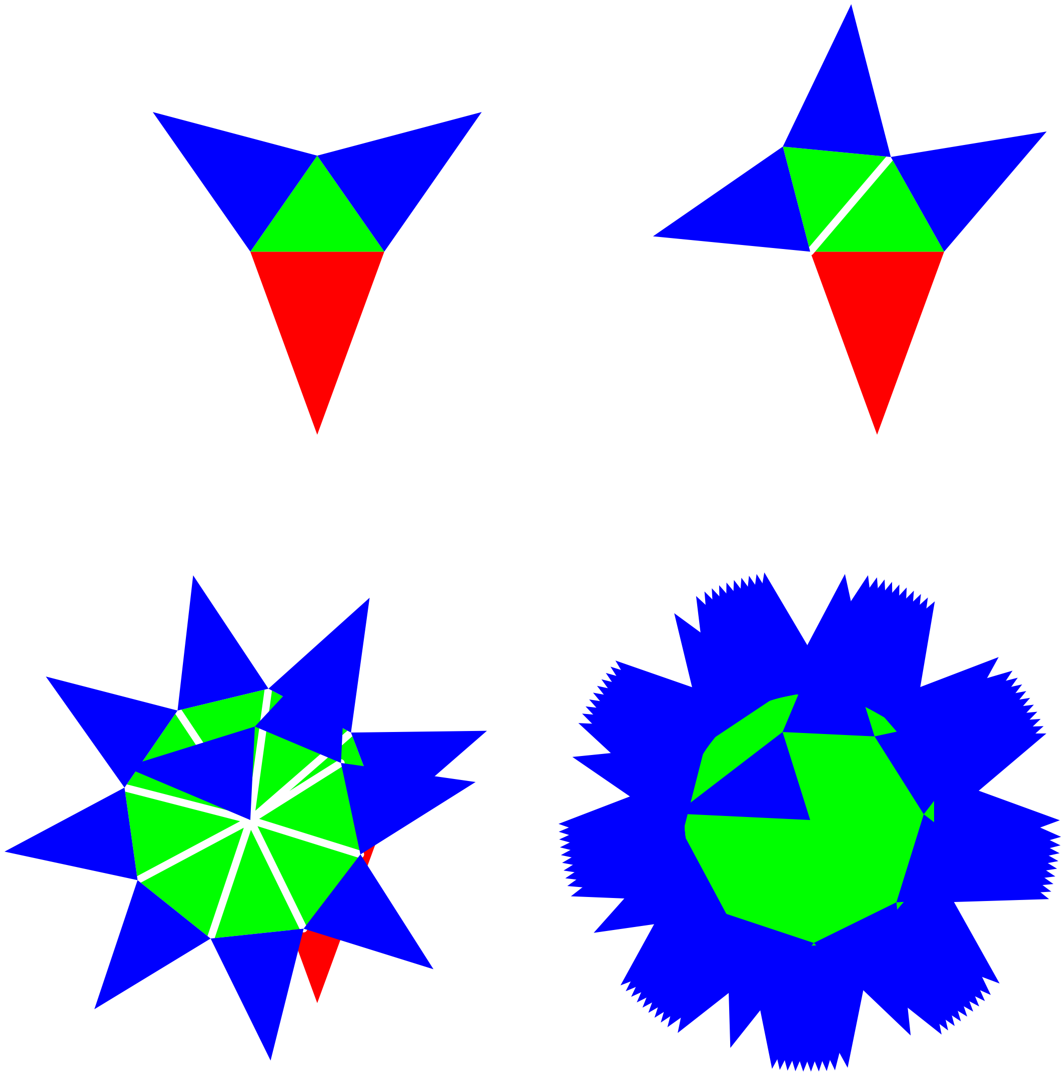
Das Ende vom Bohnenlied

Es ergibt sich ein regelmäßiger Stern mit neun Spitzen. Dies lässt sich so einsehen: Es ist $2\gamma = 140°$; das ist aber der Innenwinkel des regelmäßigen Neuneckes. Analog erhalten wir eine regelmäßige Figur, wenn γ ein rationaler Teil des vollen Winkels von 360° ist. Für $\gamma = 18°$ zum Beispiel ergibt sich folgende Pentagramm-Figur:



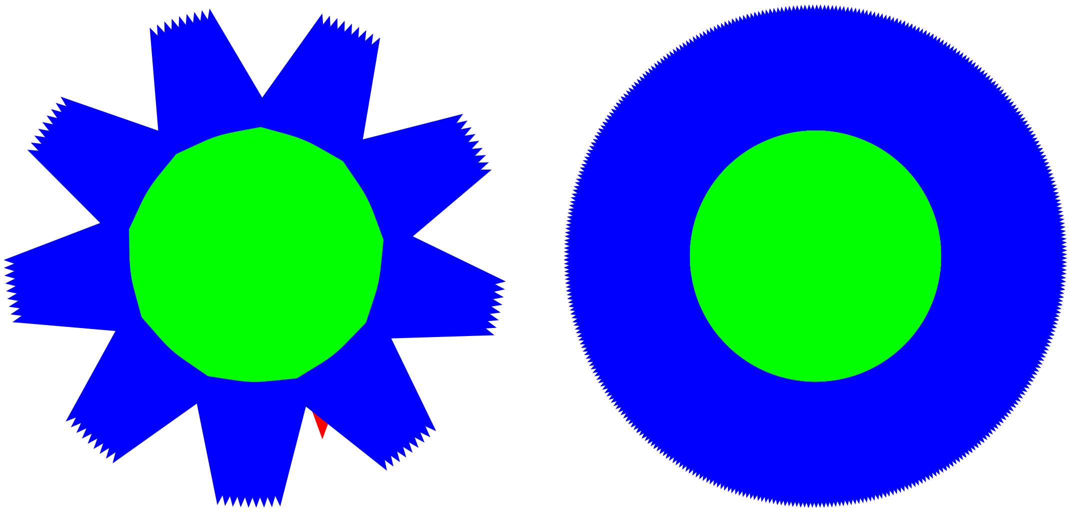
Pentagramm

Wir wählen jetzt einen zum vollen Winkel *irrationalen* spitzen Winkel γ, nämlich im Bogenmaß $\gamma = 1.22 \approx 69.90085100596°$. In der folgenden Figurenfolge sind der Reihe nach 1, 2, 10, 100 grüne Dreiecke gezeichnet.



Irrationaler Winkel γ

Weglassen der ersten 20 Fälle bringst nun nicht mehr; in der folgenden Figur sind von 100 beziehungsweise 500 Fällen je die ersten 20 Fälle weggelassen worden.



Kreissägeblatt

Literatur

[Walser 2004] Walser, Hans: Pythagoras, eine archimedische Spirale und eine Approximation von π. *Praxis der Mathematik* (6/46), 2004, S. 287-288

Websites

http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/D/Dreiecksketten/Dreiecksketten.htm