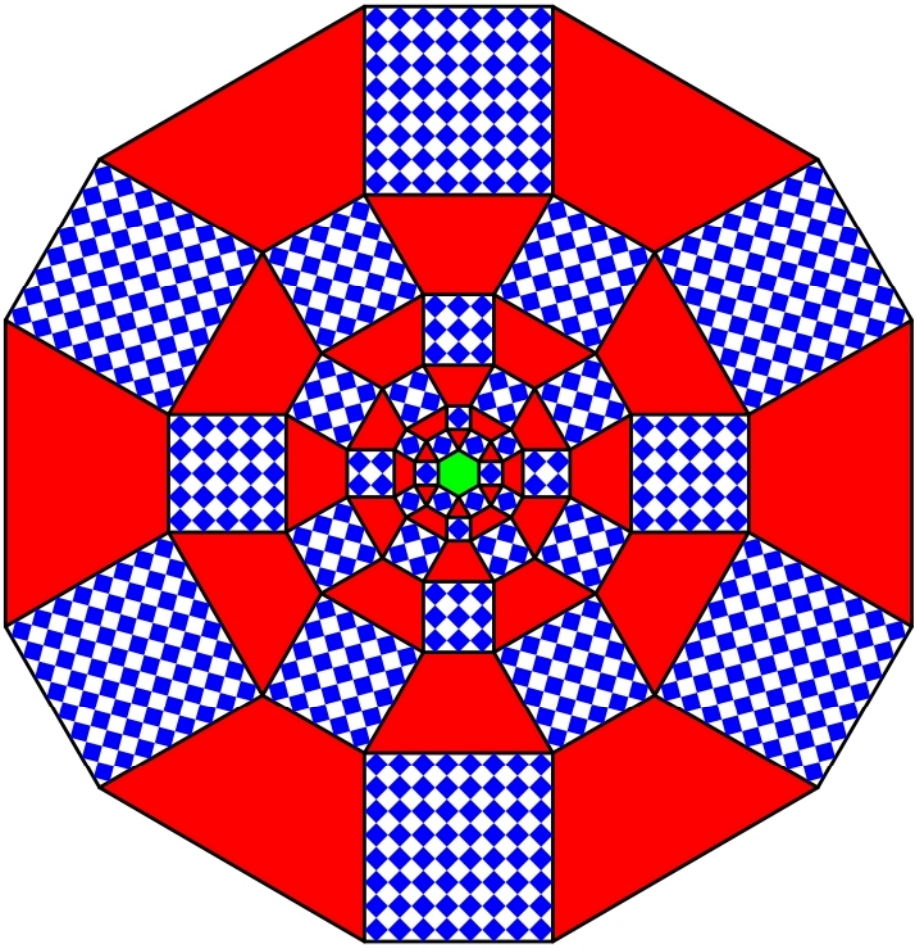
Hans Walser



Der Baustein ist das Werkzeug

Montag, 27. Juni 2011

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Abstract

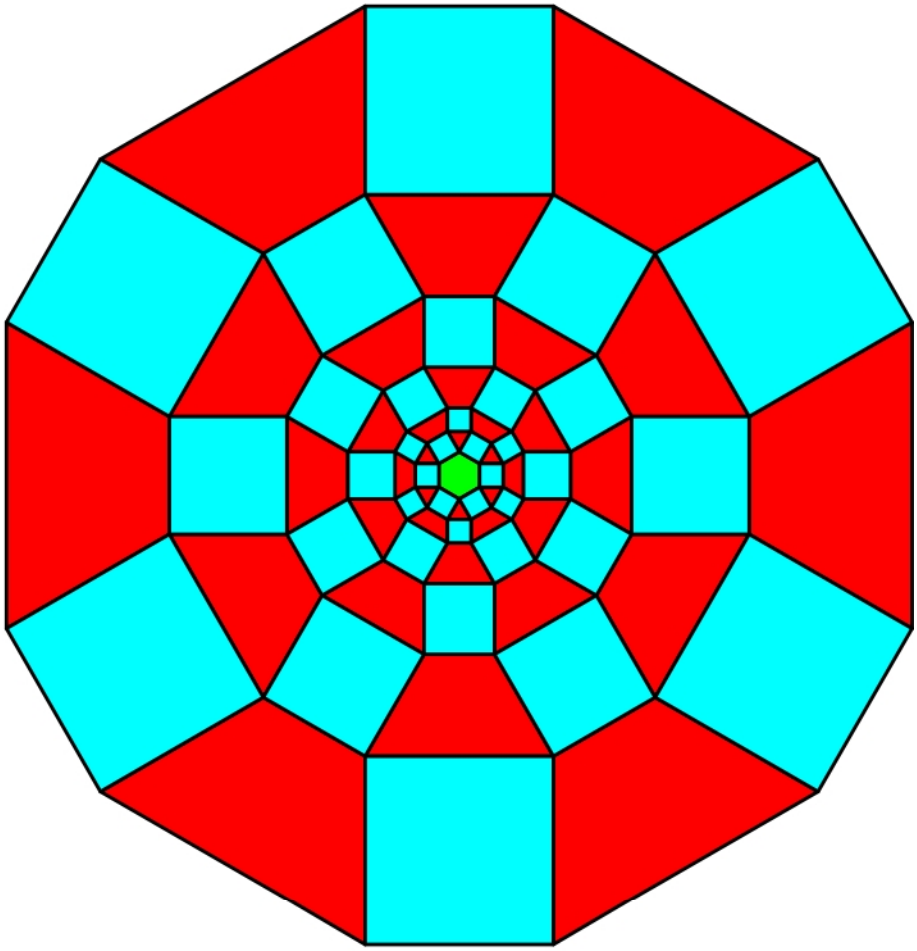
In einer arbeitsteiligen Welt sind die Grenzen zwischen Werkzeug, Rohmaterial und Produkt fließend geworden. Das gilt insbesondere in der Geometrie bei Verwendung von GDS (dynamische Geometrie-Software) und anderen elektronischen Hilfsmitteln. Ein Kreis muss nicht mehr mit dem Werkzeug „Zirkel“ gezeichnet werden, sondern steht auf Anklick bereit.

Im Vortrag werden exemplarisch gegebene Formen wie Quadrat, gleichseitiges Dreieck, gleichschenkliges Trapez als „Werkzeuge“ eingesetzt. Als Werk-Plattformen werden regelmäßige Raster verwendet. Einem regulären Sechseck werden Quadrate und gleichschenklige Trapeze aufgesetzt. Es erscheinen die Fibonacci Zahlen und der goldene Schnitt. Ein passendes Gelenkmodell führt zum Kehrwert einer Zahl.

1 Die Basisfigur

Die folgenden Überlegungen sind angeregt worden durch [Deshpande 2009].

Wir beginnen mit einem regulären Sechseck und setzen sukzessive Quadrate an. Dies ist zunächst eine rein spielerische und nicht zielorientierte Variation des Ansetzens von Quadraten an den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes, wie wir dies von der Pythagoras-Ikone her kennen. In den Zwischenräumen werden zunächst Dreiecke und dann gleichschenklige Trapeze sichtbar. Die Quadrate dienen als Spannwerkzeuge für die Figur. Eine Variante ist das Ansetzen von DIN-Rechtecken (vgl. [Nelsen 2000, S. 25], [Walser 2010]).



Ansetzen von Quadraten und Trapezen

2 Fibonacci-Quadrate

Die Kantenlängen der Quadrate bilden die Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Bildungsnahe Pädagogen vermissen hier wohl die Geschichte mit Fibonaccis Kaninchen. Sie fängt so an: *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur*. Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein allseitig ummauertes Gehege, um zu erfahren, wie viele Nachkommen (paarweise gezählt) dieses Paar im Laufe eines Jahres haben werde. Es wird dabei vorausgesetzt, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Kaninchen würden vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an gebären. Ferner soll kein Kaninchen sterben oder von außen dazu kommen. Für die Anzahlen der Kaninchenpaare je Monat ergeben sich die Fibonacci-Zahlen.

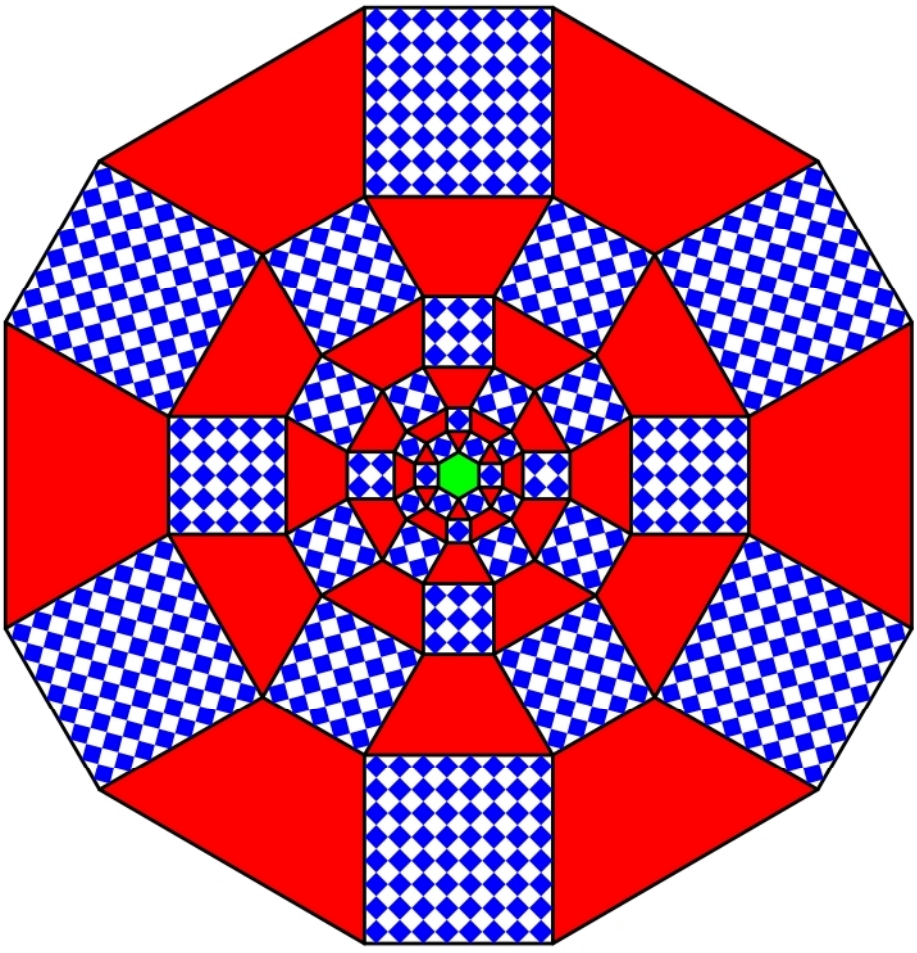
Diese Aufgabe ist nicht sehr realistisch. Wir haben hier ein frühes didaktisches Beispiel eines an den Haaren herbeigezogenen „Anwendungsbezuges“ der Mathematik. Das Beispiel wurde aber zu einer Ikone für die Fibonacci-Folge und droht die eigentliche mathematische Leistung Fibonaccis, nämlich den Transfer der (arabischen) Mathematik ins mittelalterliche Europa, in den Hintergrund zu drängen. Realistischer wäre etwa der Stammbaum einer Drohne (vgl. [Walser 2009, S. 89/90]).

Die heute nach Fibonacci benannte Folge war allerdings schon vor Fibonacci bekannt [Singh 1986]. Ihre früheste Erwähnung findet sich in der indischen Mathematik unter dem Namen mātrāmeru („Berg der Kadenz“) in den Chandahsūtras („Kunst der Proso-

die“) des Sanskrit-Grammatikers Pingala (zwischen 5. und 2. Jh. v. Chr.). Ausführlich behandelten später Virahānka (6. Jh.) und Ācārya Hemacandra (1089–1172) die Fibonacci-Folge [Lehmann 2009]. Ācārya Hemacandra beruft sich dabei auf den indischen Mathematiker Gopala, der diese Folge im Jahre 1135 untersucht hat. Über arabische Quellen hat Fibonacci wahrscheinlich Arbeiten der Sanskrit-Grammatiker kennen gelernt.

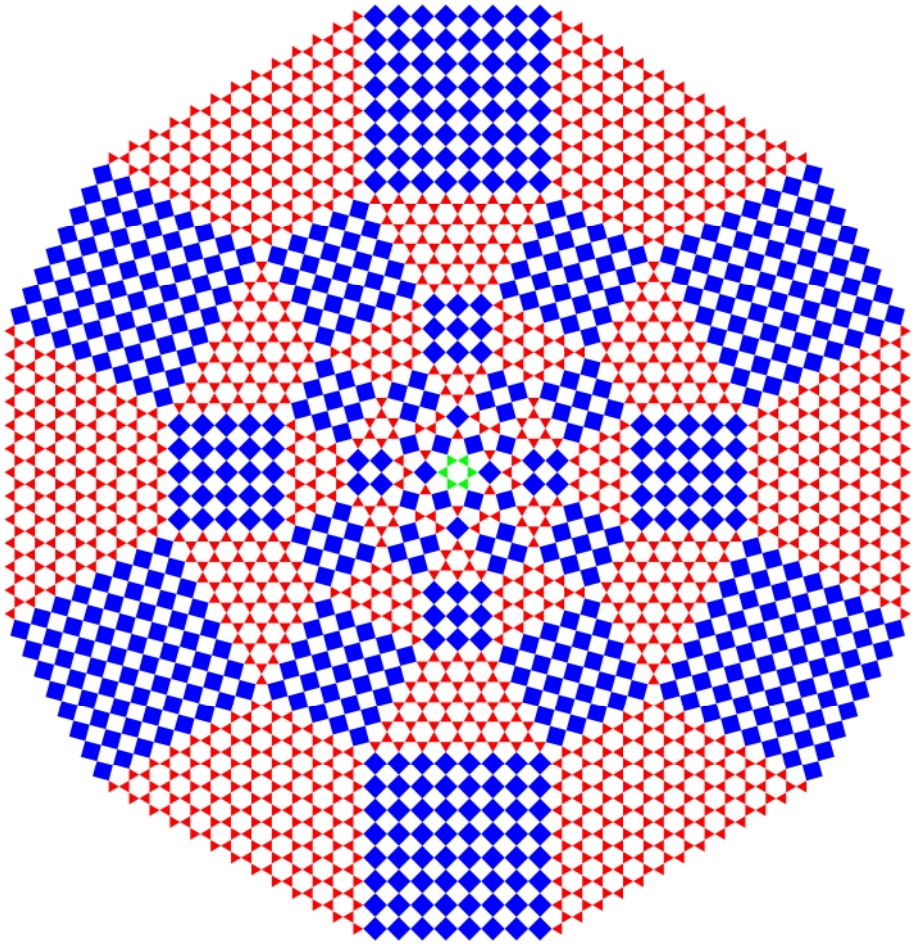
Auch in der westlichen Welt waren die Fibonacci-Zahlen schon früher erwähnt worden, waren aber offenbar wieder in Vergessenheit geraten. Nikomachos von Gerasa (100 n. Chr.) soll diese Folge neben anderen Zahlenfolgen aufgelistet haben.

Dass wir es in unserem Kontext mit Fibonacci-Zahlen zu tun haben, kann mit Raster-Werkzeugen eingesehen werden, indem wir die Seitenlängen der Quadrate durch Rasterung sichtbar machen. Das Quadratraster dient zunächst als Mess- oder Zählwerkzeug.



Fibonacci-Quadrate

Das ist jetzt allerdings noch kein Beweis, dass die Seitenlängen der Quadrate sich wie die Fibonacci-Zahlen verhalten; die Rasterungen könnten ja unterschiedlich groß sein. Wenn wir aber auch die Trapeze geeignet rastern, sehen wir, dass die Rasterungen der Quadrate konsistent sind. Nun dienen die Raster als Beweismittel.

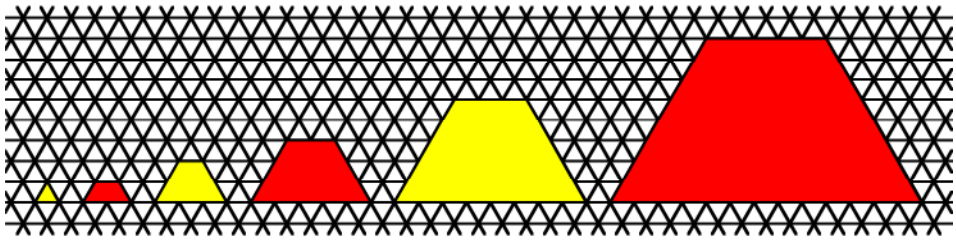


Fibonacci-Quadrate und Fibonacci-Trapeze

3 Fibonacci-Trapeze

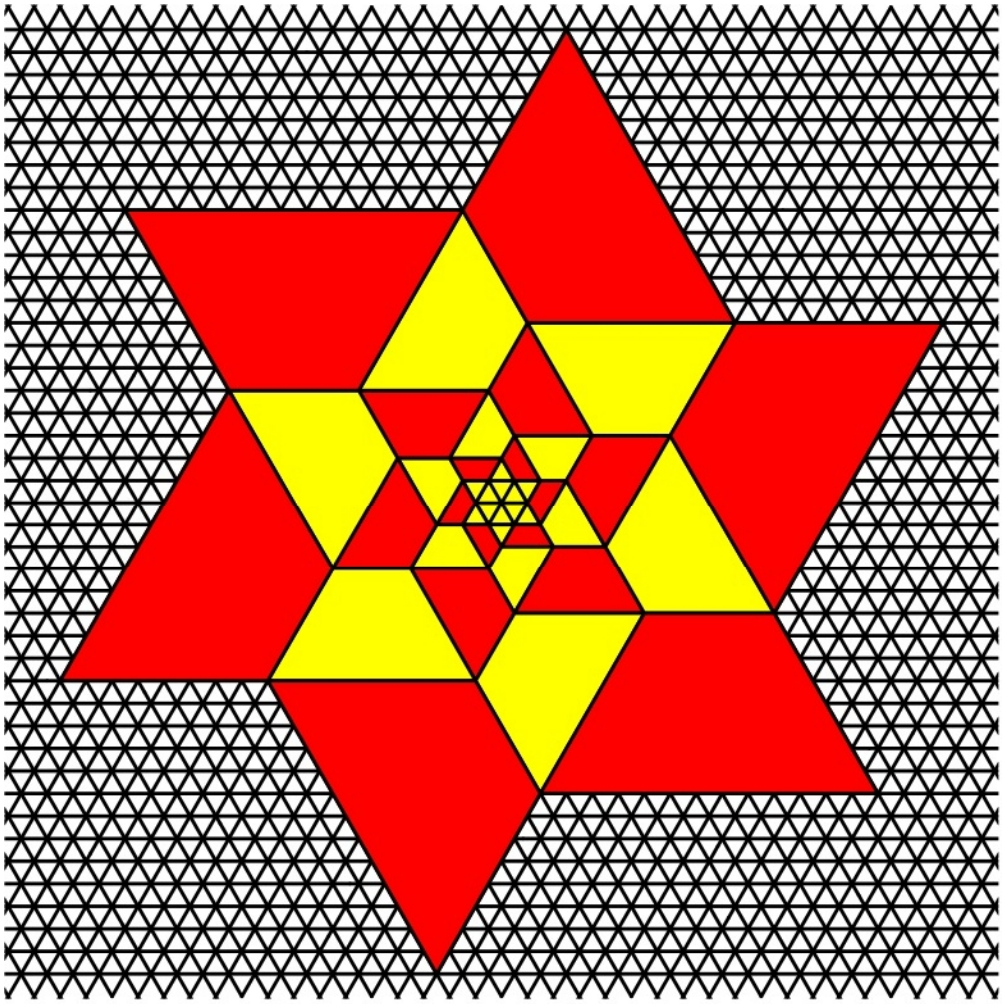
Die Trapeze haben also als Seitenlängen drei aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen. Wir sprechen von *Fibonacci-Trapezen*. Sie passen in ein reguläres Dreiecksraster.

Die Frage ist, ob sich die Gesamtheit der Fibonacci-Trapeze flächendeckend und überlappungsfrei in ein Dreiecksraster packen lässt.



Die einzelnen Fibonacci-Trapeze, zweifarbig

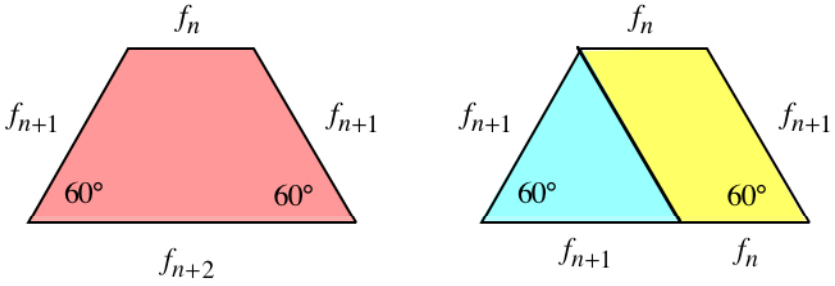
Mit diesen Bausteinen kann im Dreiecksraster der *Fibonacci-Stern* gebildet werden.



Fibonacci-Stern

4 Die Fibonacci-Rekursion

Durch Einzeichnen eines regulären Dreieckes in den Fibonacci-Trapezen wird die Rekursion $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ sofort sichtbar. Das Trapez dient als kognitives Werkzeug.



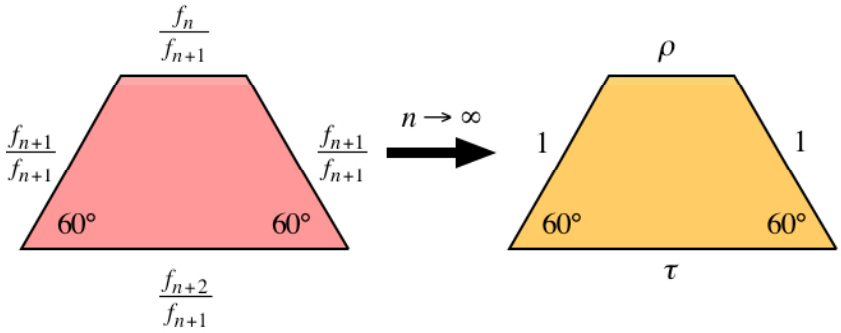
Visualisierung der Fibonacci-Rekursion

5 Das goldene Trapez

Wir normieren die Schenkellängen der Fibonacci-Trapeze auf 1 und machen den Grenzübergang $n \to \infty$. Für die Fibonacci-Zahlen gelten die beiden Grenzwerte (vgl. [Walser 2009, S. 87f]):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=\rho=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}=\tau=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$$

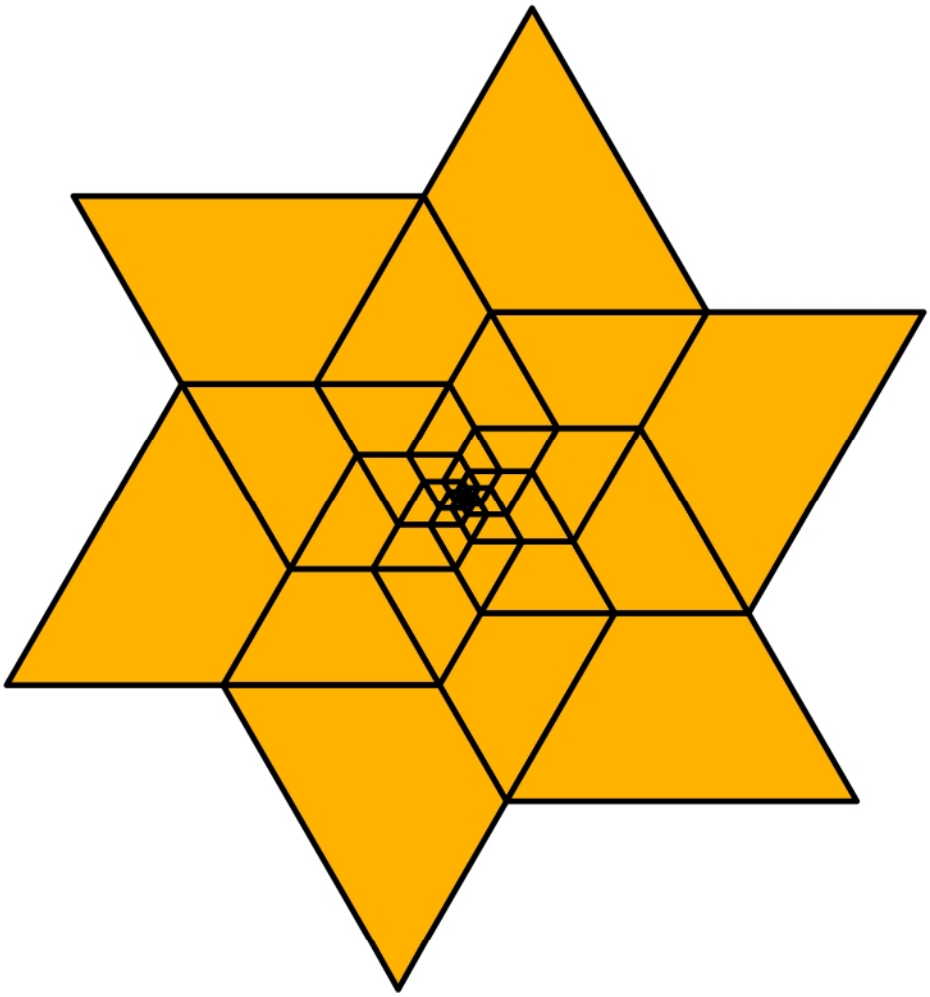
Es entsteht daher das *goldene Trapez* mit der Deckparallelenlänge ρ, der Schenkellänge 1 und der Basislänge τ.



Goldenes Trapez

6 Goldener Stern

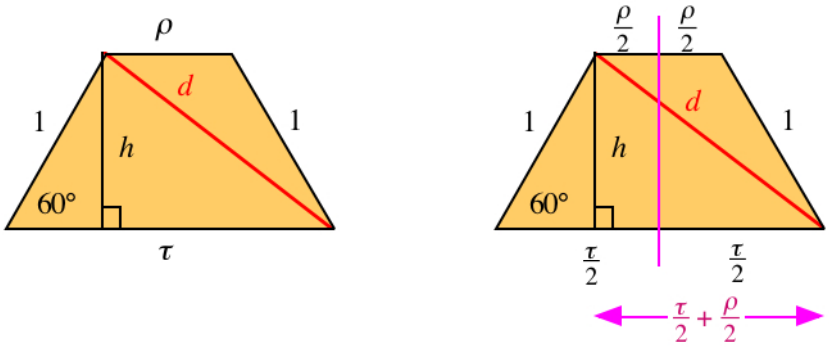
Goldene Trapeze lassen sich zum goldenen Stern zusammensetzen. Von außen nach innen nehmen die Trapezlängen um den Faktor ρ ab. Wir haben also eine abnehmende geometrische Folge und erreichen daher das Zentrum nie. Dieses ist ein weißes Loch.



Goldener Stern

7 Diagonale im goldenen Trapez

Wie lang ist die Diagonale d im goldenen Trapez?



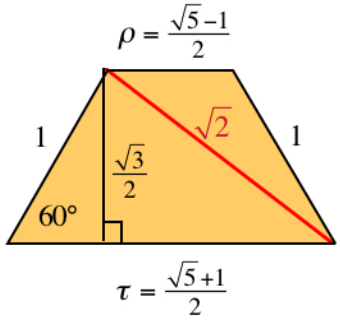
Diagonale, Höhe und Symmetrieachse

Zunächst gilt $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Unter Ausnützung der Symmetrie finden wir $d^2 = h^2 + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\rho}{2}\right)^2$.

Wegen $\tau + \rho = \sqrt{5}$ ergibt sich:

$$d^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+5}{4} = 2 \quad \text{also} \quad d = \sqrt{2}$$

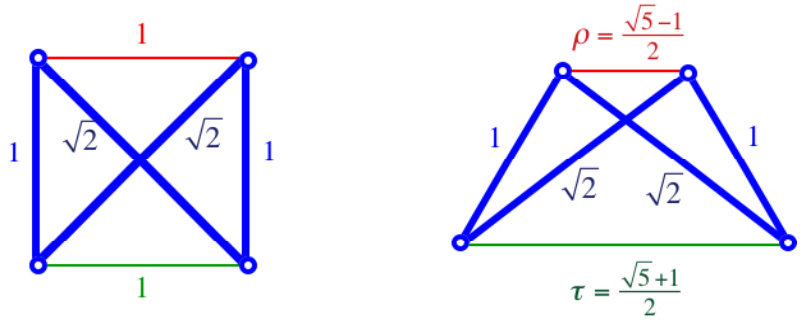
Im goldenen Trapez kommen die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ vor.



Maßverhältnisse im goldenen Trapez

8 Vergleich mit dem Quadrat. Gelenkmodell

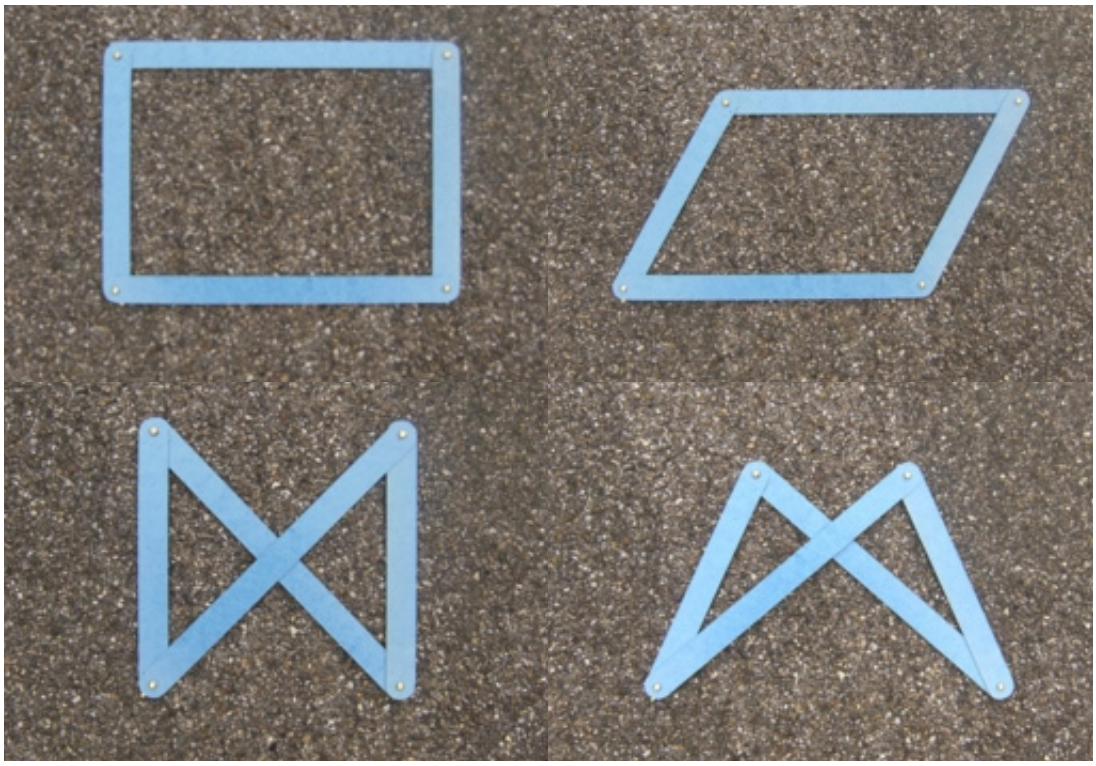
Im goldenen Trapez haben wir zwei Seiten der Länge 1 und Diagonalen der Länge $\sqrt{2}$. Dasselbe trifft auch für das Einheitsquadrat zu.



Vergleich mit Einheitsquadrat

Das gibt Anlass zum Bau eines Gelenkmodells mit zwei Einheitsstäben und zwei Stäben der Länge $\sqrt{2}$, die abwechslungsweise an den Enden gelenkig verbunden sind. Ein

solches Modell kann aus Pappe mit Mustertütenklammern als Gelenken hergestellt werden.



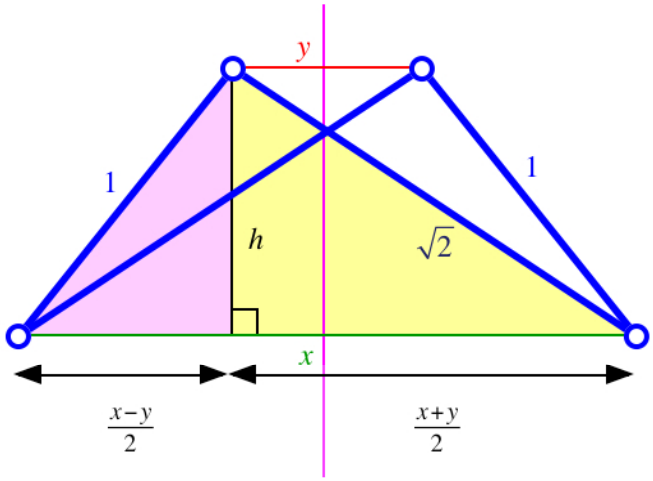
Gelenkmodell

Mit dem Gelenkmodell kann zum Beispiel das DIN-Rechteck gebildet werden, und bei Überkreuzen der Stäbe der Länge $\sqrt{2}$ eben das Einheitsquadrat oder das goldene Trapez.

9 Kehrzahl

Wegen $\tau\rho = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-1}{4} = 1$ ist ρ die Kehrzahl von τ. Das Einheitsquadrat und das goldene Trapez haben also zusätzlich gemeinsam, dass die Längen der unteren und der oberen Parallelseiten Kehrzahlen voneinander sind.

Dies trifft sogar für alle Trapeze zu, die mit dem Gelenkmodell gebildet werden können.



Beliebige Einstellung des Gelenkmodells

Mit den Bezeichnungen der Figur gilt für die Höhe h:

$$\text{Dreieck rechts:} \quad h^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$\text{Dreieck links:} \quad h^2 = 1^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

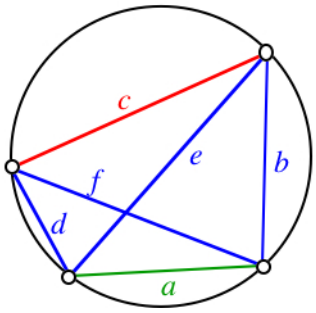
Gleichsetzen liefert:

$$2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$1 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2\right) = xy$$

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

Der Beweis kann auch mit dem Satz des Ptolemäus geführt werden. Der Satz des Ptolemäus besagt, dass in einem Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c, d und den Diagonalen e und f die Relation $ef = ac + bd$ gilt.



Sehnenviereck

Ein gleichschenkliges Trapez ist ein spezielles Sehnenviereck. In unserem Sonderfall ist $e = f = \sqrt{2}$, $a = x$, $c = y$ und $b = d = 1$. Somit haben wir:

$$\sqrt{2}\sqrt{2} = xy + 1 \cdot 1 \quad \text{also} \quad 1 = xy$$

Das Gelenkmodell ist ein Inversionswerkzeug, allerdings mit beschränkter Reichweite, da $x \in \left[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1\right]$.

Literatur

[Deshpande 2009] Deshpande, M. N. : Proof Without Words: Beyond Extriangles. *MATHEMATICS MAGAZINE*. Vol. 82, No. 3, June 2009, p. 208.

[Lehmann 2009] Lehmann, Ingmar: FIBONACCI-Zahlen – Ausdruck von Schönheit und Harmonie in der Kunst. *MU Der Mathematikunterricht*. Jahrgang 55. Heft 2. S. 51-63.

[Nelsen 2000] Nelsen, Roger B.: *Proofs without Words II*. Washington, DC, Mathematical Association of America, 2000, S. 25 (A Putnam Dodecagon; Problem I-1, 24th Putnam Competition, 1963).

[Singh 1986] Singh, Parmanand: Acharya Hemachandra and the (so called) Fibonacci Numbers. *The Mathematics Education Siwan*, 20(1), 1986, p. 28-30.

[Walser 2009] Walser, Hans: *Der Goldene Schnitt*. 5., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2009. ISBN 978-3-937219-98-1.

[Walser 2010] Walser, Hans: DIN-Format und Fibonacci Zahlen. *MNU Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 63/3 (15. 4. 2010), S. 151.