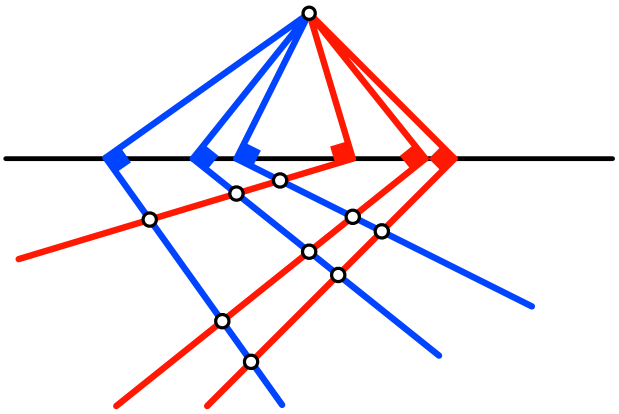
Hans Walser



Ein namenloses Phänomen

Arbeitskreis Geometrie der GDM

Saarbrücken

11. – 13. September 2015

Zusammenfassung

Ein Faltspiel und ein Spiel mit rechten Winkelhaken führen beide zu einem symmetrischen Phänomen, welches im Lehrplan nicht kodifiziert ist. Der (asymmetrische) Strahlensatz erweist sich als Grenzfall.

Die Überlegungen wurden angeregt durch einen didaktischen Fehler in einem Arbeitsblatt für das 8. Schuljahr.

1 Eine Warum-Litanei

1.1 Die Litanei

Im Folgenden einige Phänomene, die zum Nachdenken anregen:

- Warum braucht es für die Berechnung der Hypotenusenlänge den Umweg über die Kathetenflächen?
- Warum ist der Satz des Pythagoras asymmetrisch?
- Warum ist der Strahlensatz asymmetrisch?
- Warum fehlt beim 1d-Kreis-Inhalt das π?
- Warum ist das 3d-Analogon zum Quadrat nicht eindeutig?

1.2 Kommentare

Warum braucht es für die Berechnung der Hypotenusenlänge den Umweg über die Kathetenflächen? – Diese Frage wurde mir von einem Schüler gestellt. Ich kann sie nicht beantworten.

Warum ist der Satz des Pythagoras asymmetrisch? – Wir haben ein Hypotenusenquadrat, aber zwei Kathetenquadrate.

Genau in einem Viereck mit orthogonalen Diagonalen sind die beiden Summen der Quadratflächen über gegenüberliegenden Seiten gleich groß (Abb. 1).

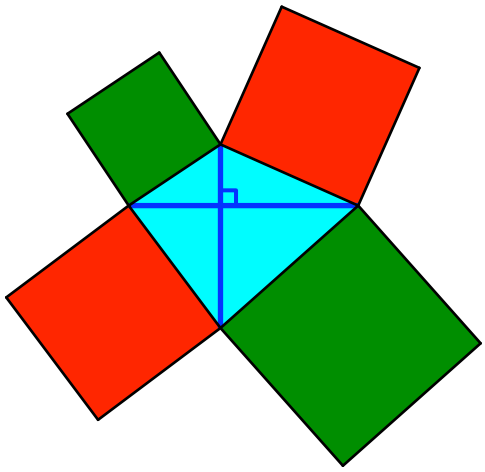


Abb. 1: Rot gleich Grün

Warum ist der Strahlensatz asymmetrisch? – Diese Frage wird im Folgenden diskutiert aber nicht beantwortet.

Warum fehlt beim 1d-Kreis-Inhalt das π? – Für den 2d-Kreis haben wir den Flächeninhalt πr^2, für die 3d-Kugel den Volumeninhalt $\frac{4}{3}\pi r^3$. Der 1d-„Kreis“, also das Intervall, das vom Mittelpunkt aus auf beiden Seiten die Länge r aufweist, hat den Längeninhalt $2r$. Die Kreiszahl π fehlt. Das Problem „löst“ sich bei der Berechnung der Inhalte von Hyperkugeln höherer Dimensionen. Die Tabelle 1 gibt die Formeln.

Dimension	Inhaltsformel
0	-
1	$2r = \frac{2^2 1!}{2!}\pi^0 r$
2	$\pi r^2 = \frac{1}{1!}\pi^1 r^2$
3	$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2^4 2!}{4!}\pi^1 r^3$
4	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4 = \frac{1}{2!}\pi^2 r^4$
5	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5 = \frac{2^6 3!}{6!}\pi^2 r^5$
6	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6 = \frac{1}{3!}\pi^3 r^6$
7	$\frac{16}{105}\pi^3 r^7 = \frac{2^8 4!}{8!}\pi^3 r^7$

Tab. 1: Inhaltsformeln

Allgemein gilt:

Für gerade Dimension n ist der Inhalt $\frac{1}{n!}\pi^{\frac{n}{2}} r^n$. (Für die Dimension 0 gilt also der Inhalt $\frac{1}{0!}\pi^{\frac{0}{2}} r^0 = 1$.)

Für ungerade Dimension n ist der Inhalt $\frac{2^{n+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!}\pi^{\frac{n-1}{2}} r^n$.

Bemerkung: Der Paritätsunterschied kann mit Hilfe der Gamma-Funktion überbrückt werden. Wir erhalten den Inhalt $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\pi^{\frac{n}{2}} r^n$.

Warum ist das 3d-Analogon zum Quadrat nicht eindeutig? – Wenn wir uns an den Quadratseiten orientieren, erhalten wir als räumliches Analogon den Würfel. Wenn wir uns an den Quadratdiagonalen orientieren, ergibt sich das reguläre Oktaeder (Abb. 2).

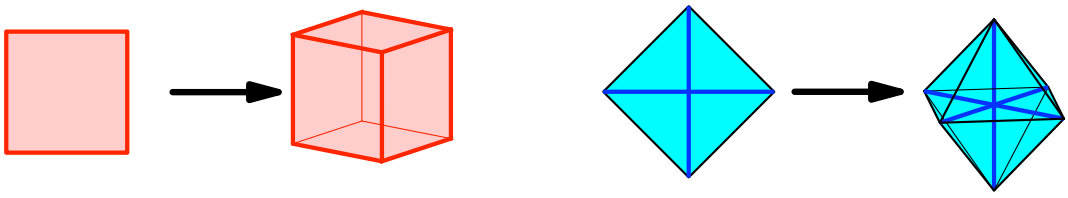


Abb. 2: Analoga des Quadrates

2 Faltgeometrie

Auf der Rückseite eines Blattes (Querformat) tragen wir am unteren Rand zwei mal drei Marken ein (Abb. 3a). Dann wenden wir das Blatt und wählen einen Punkt (Abb. 3b).

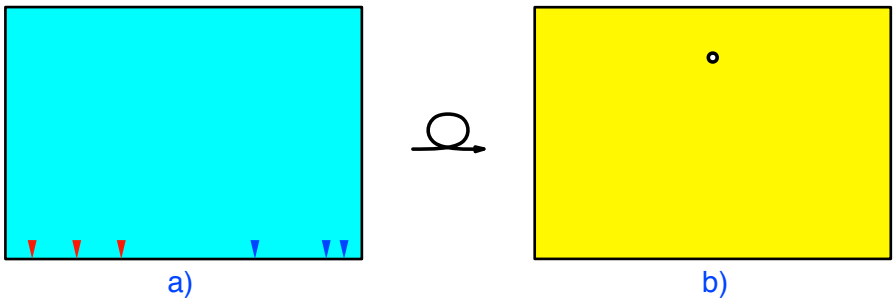


Abb. 3: Zwei mal drei Marken. Punkt wählen

Nun falten wir die erste Markierung auf den Punkt ein und wieder zurück (Abb. 4).

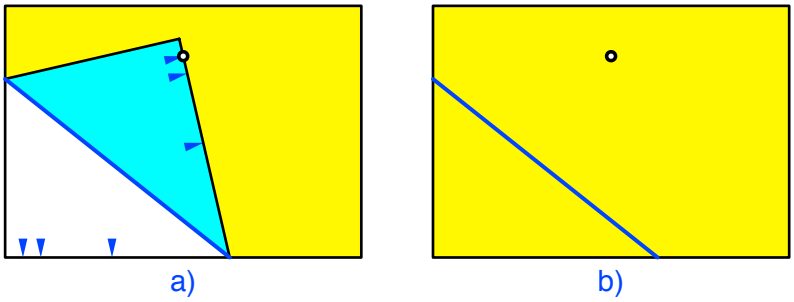


Abb. 4: Erster Faltschritt

Nun falten wir die zweite Markierung auf den Punkt ein und wieder zurück (Abb. 5).

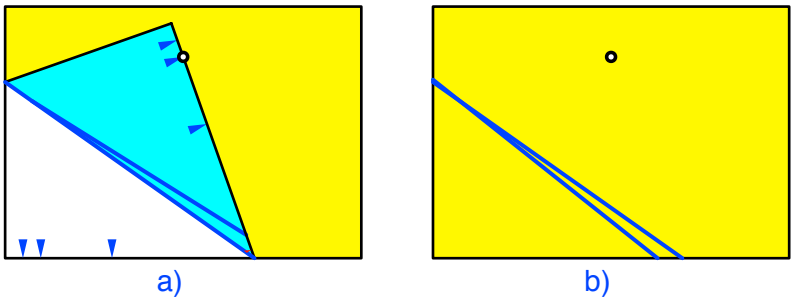


Abb. 5: Zweiter Faltschritt

Schließlich erhalten wir zwei Scharen von je drei Faltlinien (Abb. 6a). Die wechselseitigen Schnittpunkte teilen jeweils auf jeder Schar im gleichen Verhältnis (Abb. 6b). Das ist auch das Verhältnis der ursprünglich gewählten Marken (Abb. 3a).

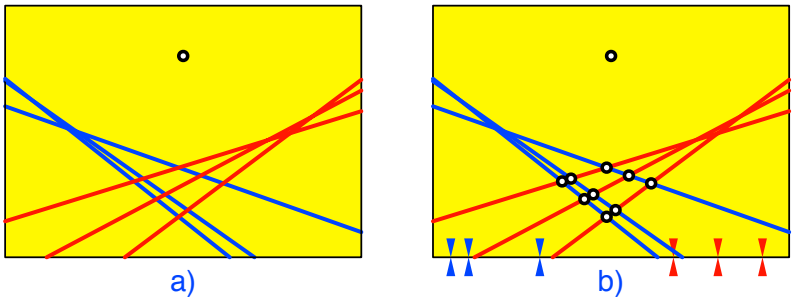


Abb. 6: Faltlinien. Teilverhältnisse

Diese Situation erinnert an den Strahlensatz.

3 Strahlensatz

In der Strahlensatzfigur (Abb. 7) haben wir aber einerseits eine Schar von parallelen Geraden und andererseits eine Schar von Geraden durch einen Punkt. Das sind begrifflich asymmetrische Vorgaben. Die Satzaussage ist aber symmetrisch: in beiden Geradenscharen sind je entsprechende Teilverhältnisse gleich.

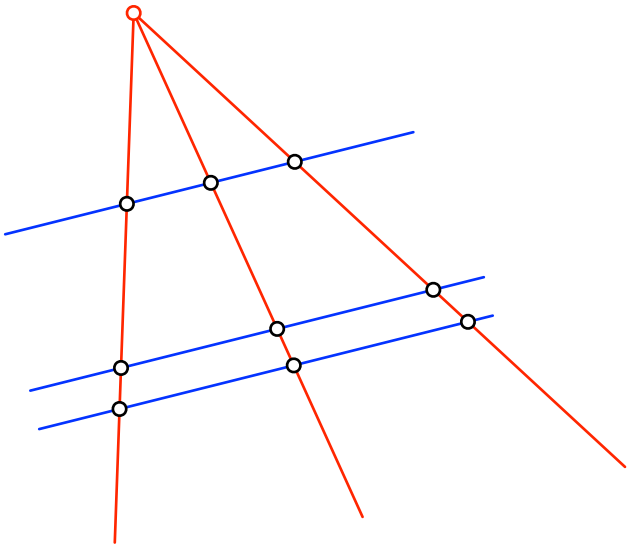


Abb. 7: Strahlensatzfigur

Die Faltfigur der Abbildung 6b ist begrifflich symmetrisch. Ebenso erhalten wir eine begrifflich symmetrische Figur mit *Winkeleisen* (Abb. 8). Dazu verfahren wir wie folgt.

4 Winkeleisen

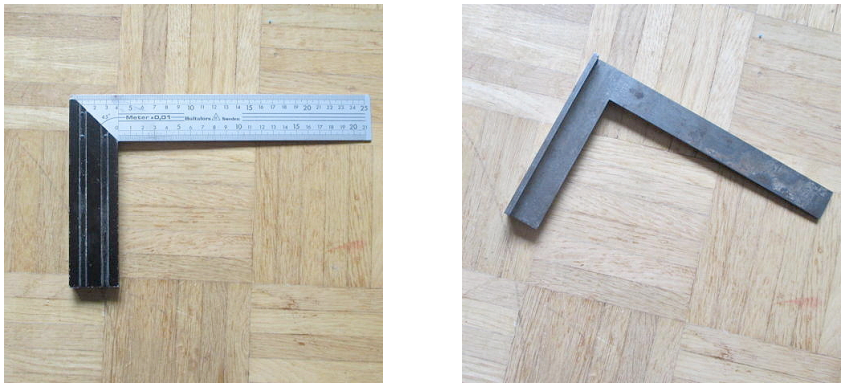


Abb. 8: Winkeleisen: Anschlagwinkel und Spenglerwinkel

Wir beginnen mit einem Punkt F und einer nicht durch F verlaufenden Geraden t. Nun passen wir gemäß Abbildung 9 zwei Sets von je drei rechten Winkeln (rote und blaue „Winkeleisen“) ein so, dass die Scheitel der rechten Winkel auf t liegen und jeweils ein Schenkel durch F verläuft. Die anderen Schenkel schneiden sich wechselseitig.

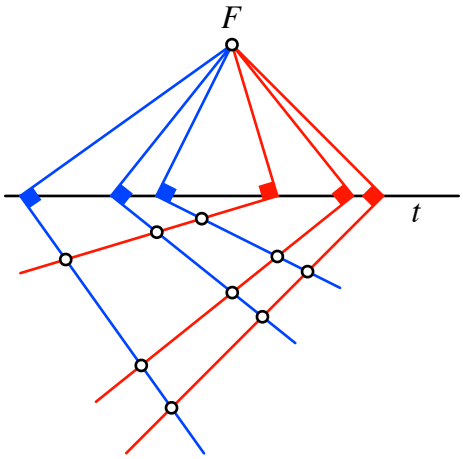


Abb. 9: Winkeleisen

Diese Schnittpunkte unterteilen die roten Schenkel im gleichen Verhältnis. Im Beispiel der Abbildung 9 ist es das Verhältnis 2:1. Ebenso unterteilen sie die blauen Schenkel im gleichen Verhältnis. Im Beispiel der Abbildung 9 ist es das Verhältnis 5:2.

Wir sind geneigt in unserem Anschauungsraum die Figur räumlich zu interpretieren. Dann allerdings haben wir das Gefühl, dass die auf uns zukommende Ebene nach unten hängt. Das hängt damit zusammen, dass die Figur *keine* perspektivische Darstellung ist.

5 Beweis

Wir legen ein Koordinatensystem gemäß der Abbildung 10 zugrunde. Als x-Achse wählen wir die Gerade t. Der Punkt F habe die Koordinaten $F(0, 1)$. Wir wählen exemplarisch einen roten Winkel mit dem Scheitelpunkt $(a, 0)$ und einen blauen Winkel mit dem Scheitelpunkt $(b, 0)$.

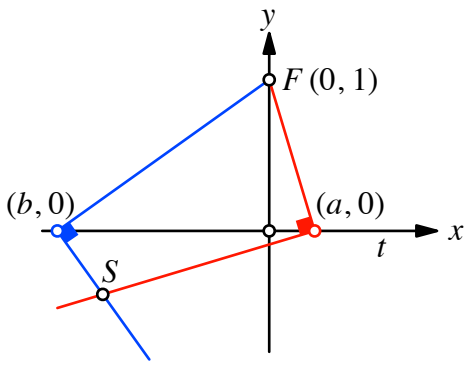


Abb. 10: Koordinaten

Der zweite rote Schenkel hat die Gleichung $y = ax - a^2$, der zweite blaue Schenkel die Gleichung $y = bx - b^2$. Für den Schnittpunkt S der beiden Schenkel ergeben sich die Koordinaten $S(a+b, ab)$. Summe und Produkt, die beiden einfachen Gottesgaben.

Die drei roten Winkel und die drei blauen Winkel der Abbildung 1 nummerieren wir mit $i \in \{1,2,3\}$ beziehungsweise $j \in \{1,2,3\}$. Die Scheitel dieser Winkel seien bei $(a_i, 0)$ beziehungsweise $(b_j, 0)$.

Der Punkt S_{ij} als Schnittpunkt des i-ten roten Schenkels mit dem j-ten blauen Schenkel hat die Koordinaten $S_{ij}(a_i + b_j, a_i b_j)$.

Nun berechnen wir das Teilverhältnis auf dem i-ten roten Schenkel:

Für die Strecke $\overline{S_{i1}S_{i2}}$ erhalten wir:

$$\overline{S_{i1}S_{i2}} = \sqrt{\left((a_i + b_2) - (a_i + b_1)\right)^2 + (a_i b_2 - a_i b_1)^2} = \sqrt{(b_2 - b_1)^2 + a_i^2 (b_2 - b_1)^2}$$
$$= |b_2 - b_1| \sqrt{1 + a_i^2}$$

Analog ergibt sich für die Strecke $\overline{S_{i2}S_{i3}}$:

$$\overline{S_{i2}S_{i3}} = |b_3 - b_2| \sqrt{1 + a_i^2}$$

Bei der Verhältnisbildung kürzt sich der Wurzelfaktor heraus:

$$\overline{S_{i1}S_{i2}} : \overline{S_{i2}S_{i3}} = |b_2 - b_1| : |b_3 - b_2|$$

Wir sehen, dass das Teilverhältnis unabhängig vom Index i ist, das heißt, es ist auf allen roten Schenkeln gleich. Es ist zudem gleich dem Teilverhältnis der Scheitel der drei blauen Winkel.

Aus Symmetriegründen gilt das Analoge für die Teilverhältnisse auf den blauen Schenkeln.

Im Abschnitt 14 eine Beweisvariante, die mit Sehnenvierecken arbeitet.

6 Link zum Strahlensatz

Wir modifizieren die Figur der Abbildung 9, indem wir mit dem Punkt F gegen die Gerade t streben.

Die beiden Winkelscharen behandeln wir aber ungleich, um die für den Strahlensatz nötige Asymmetrie zu erreichen. Bei den blauen Winkeln lassen wir die Scheitelpunkte auf t fest. Diese Winkel werden also gedreht. Bei den roten Winkeln lassen wir die Richtungen fest. Diese Winkel werden parallel verschoben.

Da die Teilverhältnisse bei den Winkelscheiteln sich nicht verändern, bleiben auch die Teilverhältnisse auf den Schenkeln invariant.

Die Abbildung 11 illustriert diesen Modifikationsprozess in mehreren Schritten. Im Grenzfall mit F auf t stehen die blauen Schenkel senkrecht auf t, sind also untereinander parallel. Die roten Schenkel verlaufen durch F. Wir haben den gewöhnlichen Strahlensatz.

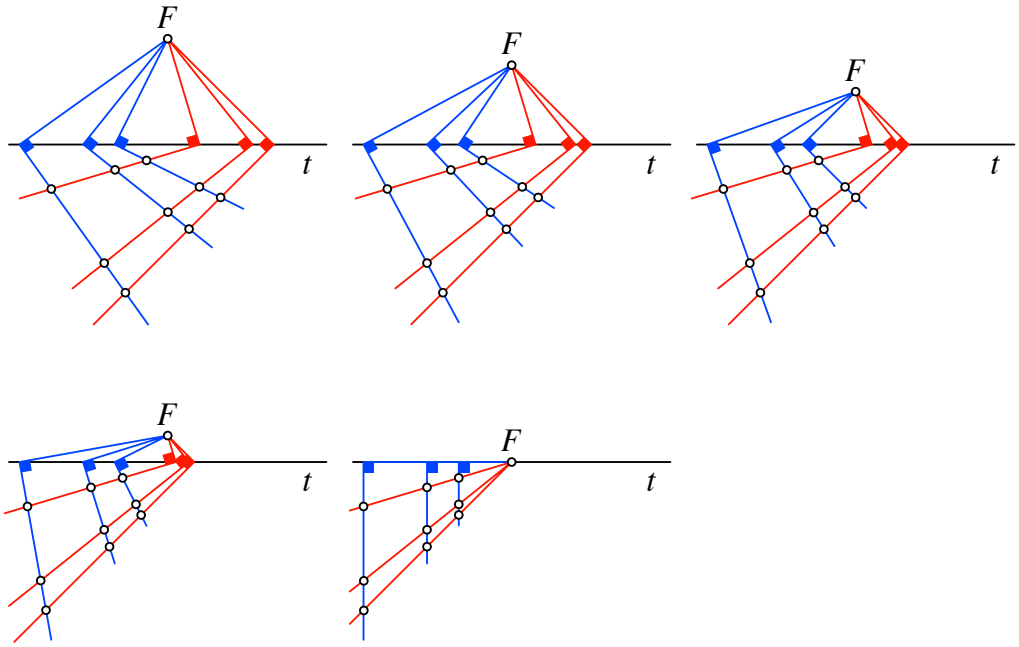


Abb. 11: Modifikation

7 Motivation

Auf einem Arbeitsblatt (8. Schuljahr) ist zu lesen:

> Eigenschaften der Trapeze
>
> - Jedes Trapez hat ein Paar gegenüberliegender paralleler Seiten.
> - Beide Mittellinien halbieren sich.

Da wurde moniert, das sei zwar fachlich richtig, aber didaktisch falsch. Die erste Zeile sei definierend für die Trapeze, die zweite Zeile gelte aber für jedes Viereck (Abb. 12a). Vielleicht sollte hier speziell auf die Mittellinien hingewiesen werden, weil eine davon nachher für die Flächenformel gebraucht wird.

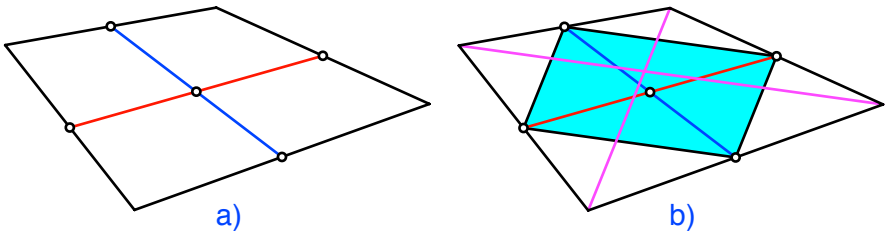


Abb. 12: Mittellinien halbieren sich

Die Halbierungseigenschaft kann über das diagonalenparallele Parallelogramm nachgewiesen werden, welches durch die Seitenmitten des allgemeinen Viereckes aufgespannt wird (Abb. 12b).

Dieser didaktische „Fehler“ erwies sich als sehr anregend: was ist, wenn *Mitte* und *halbieren* durch *Drittel* und *dritteln* ersetzt wird?

8 Dritteln

Dritteln sich Drittellinien gegenseitig?

Der Sonderfall des Trapezes erweist sich als einfach, da wir den Strahlensatz anwenden können (Abb. 13a).

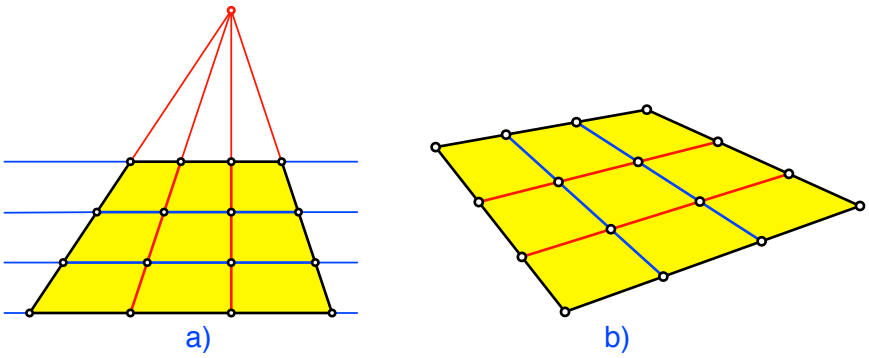


Abb. 13: Sonderfall Trapez. Allgemeines Viereck

Wir vermuten aufgrund der Zeichnung (Abb. 13b), dass sich auch im allgemeinen Fall die Drittellinien gegenseitig dritteln. Dies kann gemäß einer Mitteilung von Hans Humenberger, Wien, wie folgt gezeigt werden (Abb. 14).

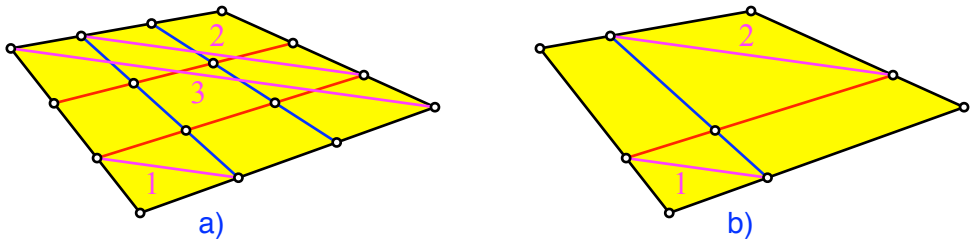


Abb. 14: Beweisfigur

Wir führen gemäß Abbildung 14a eine Diagonale und dazu parallele Strecken ein. Diese haben auf Grund des Strahlensatzes die angegebenen Längenverhältnisse. Die Abbildung 14b zeigt, dass diese zur Drittelung beim angegebenen Punkt führt. Für die anderen Schnittpunkte im Viereck kann analog überlegt werden.

Nun ist es allerdings so, dass diese Idee nicht auf Viertelung, Fünftelung, ... übertragen werden kann.

9 Beweis für den allgemeinen Fall

Wir teilen zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks im Verhältnis λ, die beiden anderen Seiten im Verhältnis μ. Wir verbinden dann die Teilpunkte gegenüberliegender Seiten. Zu zeigen ist: diese Verbindungslinien teilen sich gegenseitig in den Verhältnissen λ und μ. Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 15.

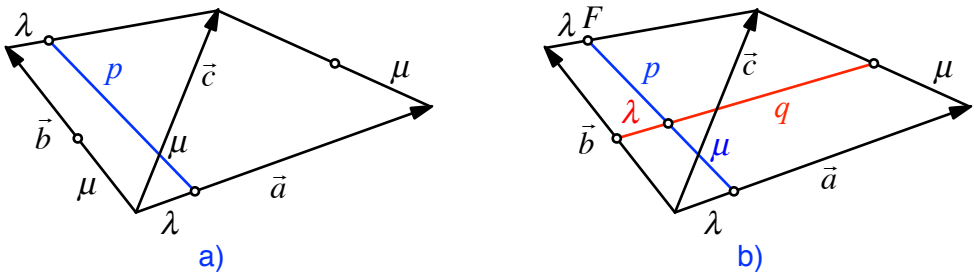


Abb. 15: Beweisidee

Für die eingezeichnete blaue Strecke p erhalten wir die Parameterdarstellung:

$$t \mapsto \lambda\vec{a} + t\vec{b} + \lambda t\left(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\right), \quad t \in [0,1]$$

Für die eingezeichnete rote Strecke q erhalten wir die Parameterdarstellung:

$$s \mapsto s\vec{a} + \mu\vec{b} + s\mu\left(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\right), \quad s \in [0,1]$$

Der Schnittpunkte ergibt sich offensichtlich für $s = \lambda$ und $t = \mu$. Das war zu zeigen.

Bemerkung 1: Der Vektor $\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)$ misst die Abweichung des Viereckes vom Parallelogramm. Im Parallelogramm ist die Teilverhältniseigenschaft trivial.

Bemerkung 2: Die Einschränkungen $t \in [0,1]$ und $s \in [0,1]$ beziehen sich auf die eingezeichneten Strecken, sind aber für den Beweisgang unerheblich. Sie werden im Folgenden weggelassen.

10 Viereckraster

Für ganze Zahlen λ und μ erhalten wir ein Viereckraster wie folgt. Wir verlängern die Viereckseiten und tragen Vielfache der Seitenlängen ab (Abb. 16a).

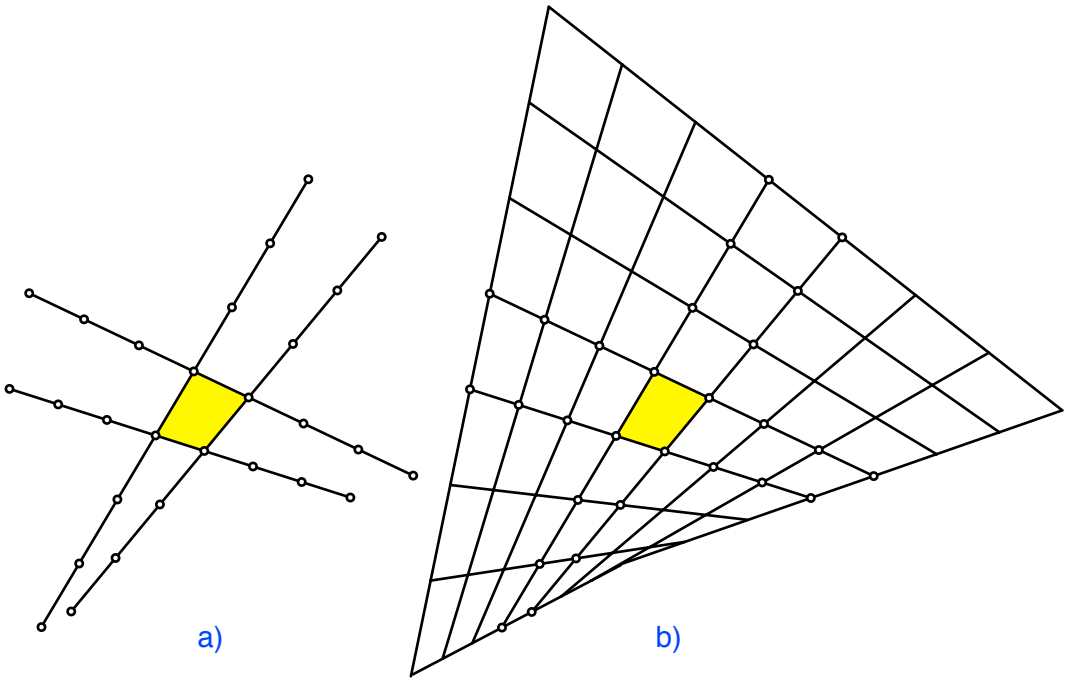


Abb. 16: Erster Schritt. Ergänzung zum Viereckraster

Anschließend ergänzen wir zum Viereckraster (Abb. 16b). Jede Rasterlinie der einen Schar wird von den Rasterlinien der anderen Schar in gleichmäßigen Abständen geschnitten.

Wir sehen, dass sich beim Überschneiden der Linien was Spannendes anbahnt.

11 Parabel

Wenn wir das Viereckraster fortsetzen, überschneiden sich die Rasterlinien. Als Enveloppe entsteht eine Kurve (Abb. 17). Die Kurve sieht aus wie eine Parabel, es könnte aber auch eine Ellipse sein. Was nun?

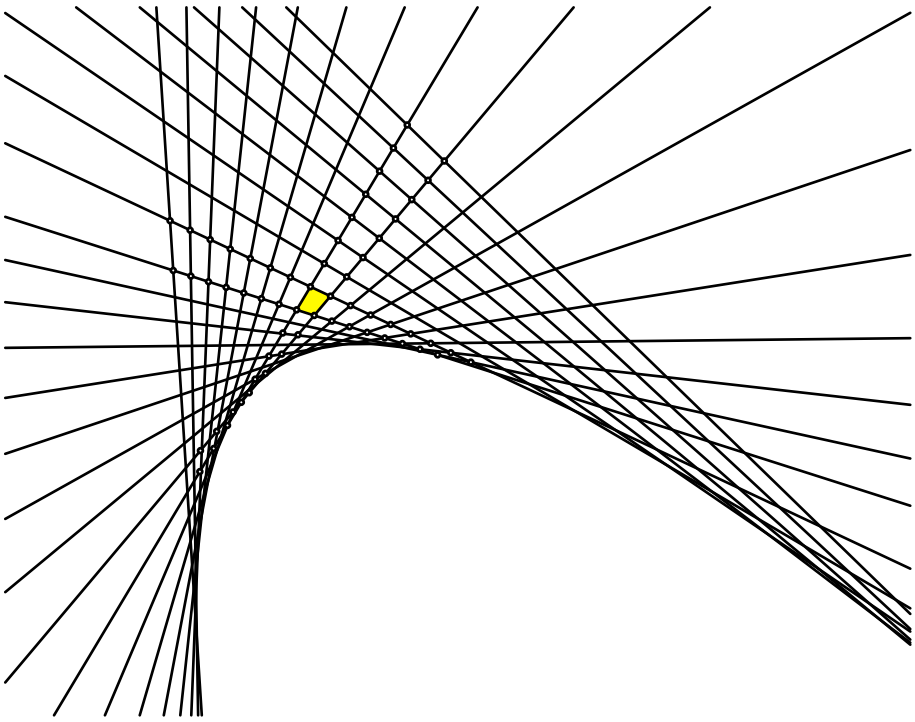


Abb. 17: Parabel

12 Sichtumkehr: Beginn mit Parabel

Wir zeichnen zweimal drei Tangenten an eine Parabel und bestimmen exemplarisch die Teilverhältnisse zwischen den wechselseitigen Schnittpunkten (Abb. 18).

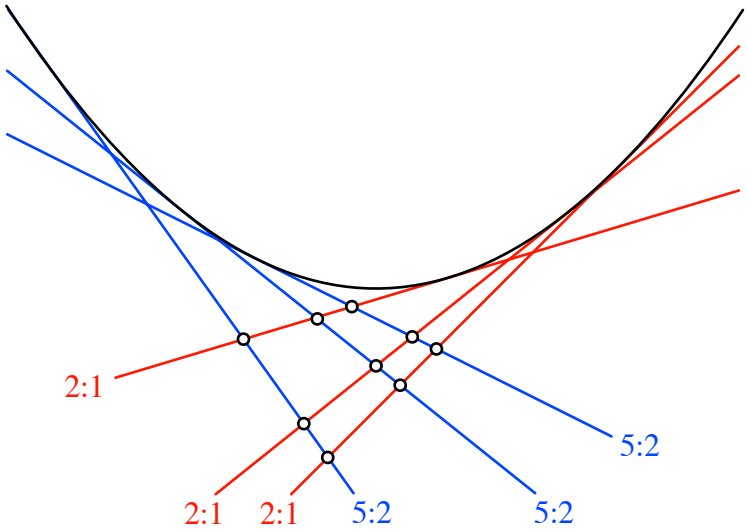


Abb. 18: Tangenten an Parabel

Wenn wir dasselbe Spielchen mit einem Kreis machen (Abb. 19a), haben wir zwar wieder Winkeleisen wie in der Abbildung 9, aber keine konstanten Teilverhältnisse. Mit einer Ellipse kann es daher auch nicht funktionieren, das sich eine Ellipse mit einer affinen Abbildung unter Erhaltung der Teilverhältnisse auf einen Kreis abbilden lässt.

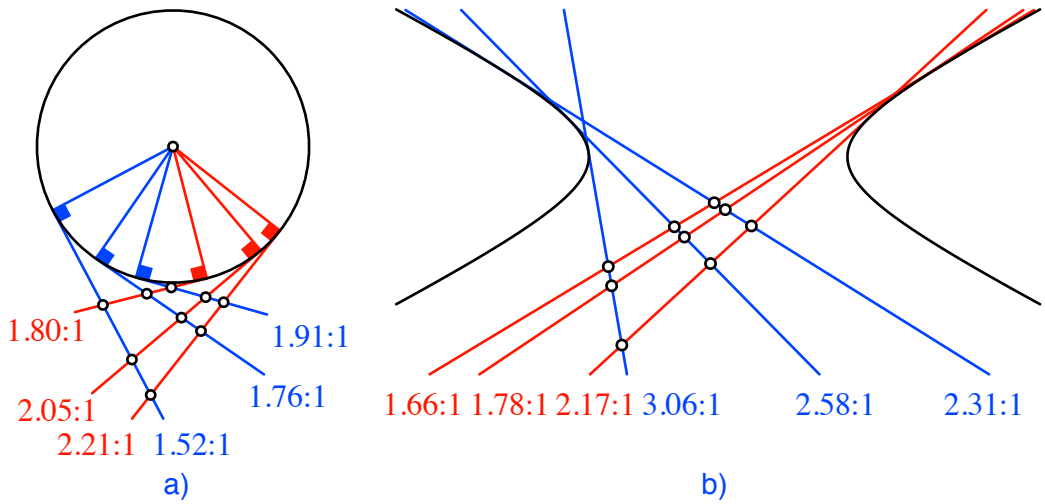


Abb. 19: Mit dem Kreis und der Hyperbel funktioniert es nicht

Auch mit der Hyperbel (Abb. 19b) ist nichts zu wollen.

Die Parabel, der Exot unter den Kegelschnitten, ist also der interessante Fall.

13 Zirkel und Lineal

Die Kegelschnitte können punktweise mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Für die Parabel benötigen wir eine Gerade (Leitlinie) und einen Punkt (Brennpunkt). Die Abbildung 20 illustriert exemplarisch die Konstruktionen von zwei Punkten. Die jeweils gleichfarbigen Abstände sind gleich groß.

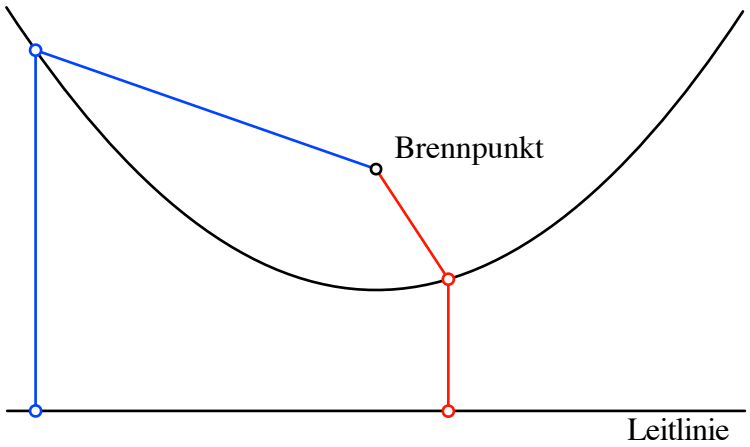


Abb. 20: Konstruktion von Parabelpunkten

Die Tangenten ergeben sich als Mittelsenkrechte (Abb. 21).

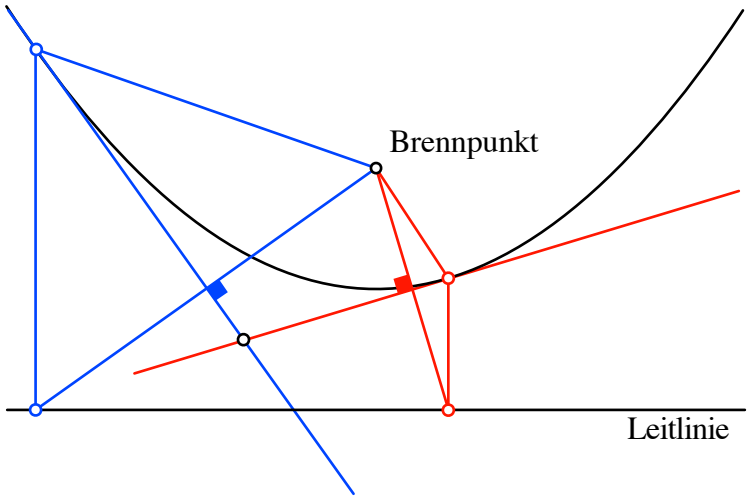


Abb. 21: Tangenten als Mittelsenkrechte

In unserem Beispiel aus der Faltgeometrie (Abb. 6) spielen der Punkt die Rolle des Brennpunktes und die untere Papierkante die Rolle der Leitlinie.

Die rechten Winkel in der Abbildung 21 liegen auf der Scheiteltangente der Parabel (Abb. 22). Dabei erkennen wir auch wieder die Winkeleisen der Abbildung 9.

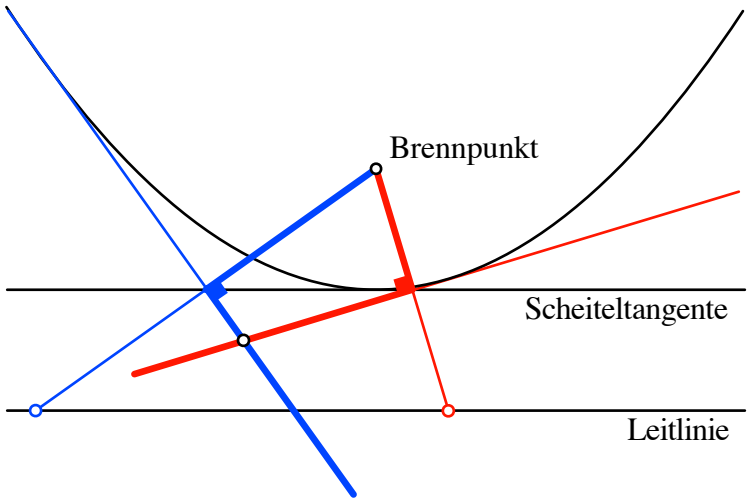


Abb. 22: Scheiteltangente und Winkeleisen

Damit schließt sich der Gedankenkreis.

14 Sehnenvierecke

Der im Abschnitt 5 vorgestellte Beweis lässt sich auch mit Sehnenvierecken durchführen. Die Idee dazu verdanke ich Emese Vargyas, Mainz.

Die Abbildung 23 entspricht der Abbildung 10; das Koordinatensystem ist weggelassen. Wegen der rechten Winkel bei A und B ist das Viereck $SAFB$ ein Sehnenviereck (Abb. 23a). In der Abbildung 23b ist zusätzlich das Sehnenviereck $CAFB$ eingezeichnet.

In diesem Sehnenvierck gilt $ab = fs$. Dabei ist s auch der Abstand von S von der Geraden AB.

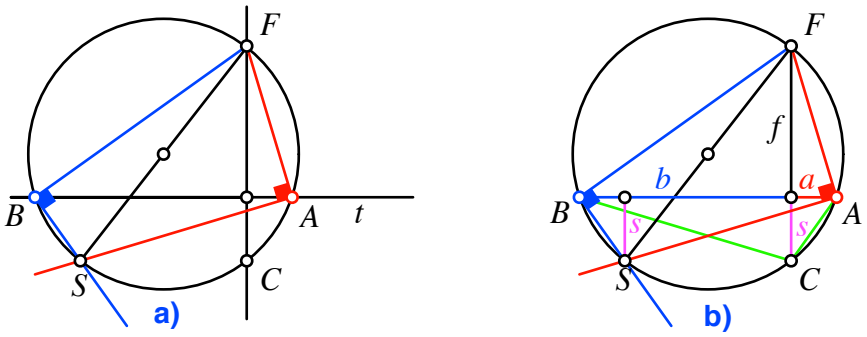


Abb. 23: Sehnenviereck

In der Abbildung 24 sind nun drei blaue rechte Winkel eingetragen.

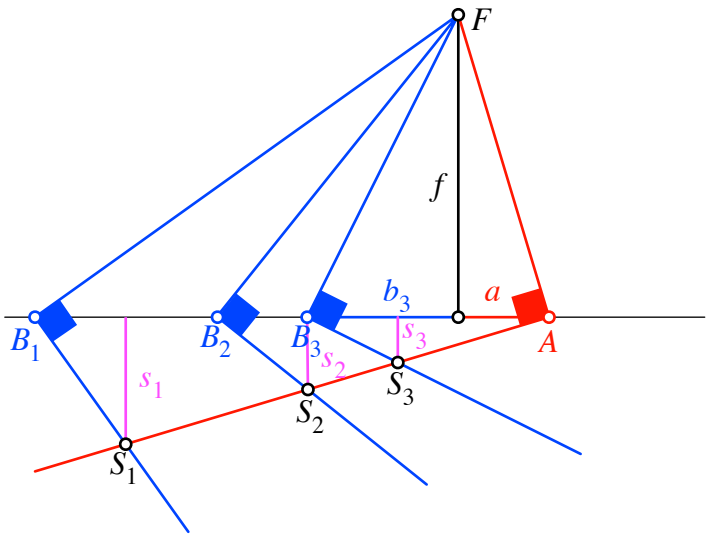


Abb. 24: Drei blaue rechte Winkel

Dabei gilt:

$$ab_i = fs_i \quad \Rightarrow \quad s_i = \tfrac{a}{f} b_i \quad \Rightarrow \quad s_1 : s_2 : s_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

Somit ist auch:

$$|AS_1| : |AS_2| : |AS_3| = s_1 : s_2 : s_3 = b_1 : b_2 : b_3$$
$$|S_1S_2| : |S_2S_3| = |B_1B_2| : |B_2B_3|$$

Das Teilverhältnis auf dem roten Schenkel ist also unabhängig von der Position des Punktes A.

Für diese Überlegungen benötigen wir die gewöhnlichen Strahlensätze.

Last modified: 16. Juni 2015